Chapitre 2

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

2.1 Éléments propres

2.1.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Proposition 2.1.1 (droite stable par un endomorphisme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit D une droite de E, et soit u un endomorphisme de E.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) la droite vectorielle D est stable par u (c'est-à-dire $u(D) \subset D$).
b) il existe un scalaire λ tel que, pour tout x de D, $u(x) = \lambda x$ (c'est-à-dire $u_{|D} = \lambda \mathrm{Id}_D$).
c) il existe un scalaire λ, et il existe un vecteur x non nul de D, tels que $u(x) = \lambda x$.

– *a)* $\Rightarrow$ *b)* : si D est stable par u, la restriction de u à D est un endomorphisme de D, et les seuls endomorphismes d'une droite sont les applications $x \mapsto \lambda x$, avec λ dans $\mathbb{K}$.
– *b)* $\Rightarrow$ *c)* : évident
– *c)* $\Rightarrow$ *a)* : on suppose qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$, et x_0 non nul dans D tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.
Pour tout x de D, il existe μ dans $\mathbb{K}$ tel que $x = \mu x_0$. Ainsi $u(x) = \mu u(x_0) = \mu\lambda x_0 = \lambda x$ est dans D. □

Définition 2.1.1 (vecteurs propres d'un endomorphisme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit u un endomorphisme de E, et soit x un vecteur **non nul** de E.
On dit que x est *vecteur propre* de u si la droite vectorielle $D = \mathbb{K}x$ est stable par u.
Cela équivaut à l'existence d'un (unique) scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$.

Dire que x est vecteur propre de u, c'est donc dire que : $\begin{cases} x \text{ est non nul} \\ \text{il existe } \lambda \text{ dans } \mathbb{K} \text{ tel que } u(x) = \lambda x \end{cases}$

Si tel est le cas, λ est défini de façon unique à partir de x, et on a : $\forall\, y \in \mathbb{K}x,\ u(y) = \lambda y$.

Pour exprimer que $D = \mathbb{K}x$ est stable par u, on dit aussi que D est une *droite vectorielle propre de u*.

Définition 2.1.2 (valeurs propres, spectre d'un endomorphisme)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et soit λ un scalaire.
On dit que λ est une *valeur propre* de u s'il existe un vecteur x **non nul** de E tel que $u(x) = \lambda x$.
L'ensemble des valeurs propres éventuelles de u est appelé le *spectre* de u, et noté $\mathrm{Sp}(u)$.
Écrire $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, c'est écrire qu'il existe dans E des « vecteurs propres pour la valeur propre λ ».

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$, on a : $u(x) = \lambda x \;\Leftrightarrow\; (u - \lambda \mathrm{Id})(x) = \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.

Les propositions suivantes sont donc synonymes : $\begin{cases} \lambda \text{ est valeur propre de } u \\ \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}) \text{ n'est pas réduit à } \{\overrightarrow{0}\} \\ \text{l'endomorphisme } u - \lambda\mathrm{Id} \text{ n'est pas injectif.} \end{cases}$

Définition 2.1.3 (sous-espace propre d'un endomorphisme)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et soit λ une valeur propre de u.
Le sous-espace $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}$ n'est donc pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$.
On dit que $E_\lambda(u)$ est le *sous-espace propre* de u pour la valeur propre λ.

Un sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u : la restriction de u à $E_\lambda(u)$ est en effet l'application $x \mapsto \lambda x$ (l'homothétie de rapport λ si $\lambda \neq 0$, et l'application nulle sinon).

Questions de terminologie

- Soit λ un élément de $\mathrm{Sp}(u)$, c'est-à-dire une valeur propre de u.
  Les vecteurs propres de u pour λ sont les éléments non nuls de $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.
  Ou encore : $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ est formé des vecteurs propres de u pour λ et du vecteur nul.
- Si x est vecteur propre de u, c'est pour une seule valeur propre (l'unique λ tel que $u(x) = \lambda x$).
  En revanche, il y a une infinité de vecteurs propres de u pour λ : ce sont les vecteurs non nuls de E_λ.

Deux cas particuliers

- Si $u = \lambda \mathrm{Id}$, alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ et $E_\lambda(u) = E$, dans la mesure bien sûr où E n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$!
  Réciproquement, ce n'est pas parce que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ qu'on a $u = \lambda \mathrm{Id}$.
  Par exemple, soit $u\colon (x, y) \mapsto (y, 0)$. On a $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$ mais u n'est pas l'application nulle.
- Le scalaire 0 est valeur propre d'un endomorphisme u si et seulement si u est non injectif.
  Le sous-espace propre associé est alors $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

▷ Quelques exemples simples

- L'endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ défini par $u(P) = XP$ n'a aucune valeur propre.
  En effet, l'égalité $XP = \lambda P$ (avec P non nul) est impossible pour des raisons de degré.
- L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (-y, x)$ n'a pas de valeur propre.
  En effet $u(x, y) = \lambda(x, y) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y = -\lambda x \\ (1 + \lambda^2)x = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x = y = 0$
- L'endomorphisme u de $\mathbb{C}^2$ défini par $u(x, y) = (-y, x)$ a pour valeurs propres i et $-i$.
  En effet $u(x, y) = \lambda(x, y) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y = -\lambda x \\ (1 + \lambda^2)x = 0 \end{cases}$ et si $\lambda \notin \{i, -i\}$, ce système n'a que la solution nulle.
  En revanche, on trouve $E_i(u) = \mathbb{C}(1, -i)$ et $E_{-i}(u) = \mathbb{C}(1, i)$.
- Les valeurs propres de l'endomorphisme $u : P \to XP'$ de $\mathbb{K}[X]$ sont tous les entiers naturels.
  En effet si le terme de plus haut degré d'un polynôme (non nul) P est $a_n X^n$, celui de XP' est $n a_n X^n$.
  L'égalité $XP' = \lambda P$ n'est donc possible que si λ est dans $\mathbb{N}$.
  Mais réciproquement $X(X^n)' = nX^n$, donc X^n est vecteur propre de u pour $\lambda = n$.
- L'endomorphisme u de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $u(f) = f'$ admet tout réel pour valeur propre.
  En effet, pour tout λ réel : $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) = \{f \in E,\ f' = \lambda f\}$ est la droite engendrée par $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$.
- On suppose que $E = F \oplus G$, avec $F \neq \{\overrightarrow{0}\}$ et $G \neq \{\overrightarrow{0}\}$.
  Soit p la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G.
  Alors $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1\}$, avec $E_0(p) = \mathrm{Ker}(p) = G$ et $E_1(p) = \mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\ (p) = F$.

2.1.2 Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 2.1.4 (valeurs, vecteurs, sous-espaces propres d'une matrice carrée)
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Les valeurs (vecteurs, sous-espaces) propres de A sont ceux de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

En d'autres termes :
- un scalaire λ est *valeur propre* de A s'il existe une matrice-colonne X **non nulle** telle que $AX = \lambda X$.
- on appelle *spectre* de A, et on note $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.
- si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, les *vecteurs propres* de A pour λ sont les colonnes X **non nulles** telles que $AX = \lambda X$.
- si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, le *sous-espace propre* de A pour λ est l'ensemble des colonnes X telles que $AX = \lambda X$.

Plus généralement

Pour les questions de vecteurs/valeurs/sous-espaces propres, il y a un rapport plus général entre d'une part les endomorphimes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et d'autre part les matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

En effet, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $\mathcal{B}$.
Soit u un endomorphisme de E, et soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
Pour tout vecteur x de E, soit $[x]_{\mathcal{B}}$ la colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.
Pour tout scalaire λ, et pour tout x de E, on a : $u(x) = \lambda x \;\Leftrightarrow\; [u(x)]_{\mathcal{B}} = \lambda[x]_{\mathcal{B}} \;\Leftrightarrow\; A[x]_{\mathcal{B}} = \lambda[x]_{\mathcal{B}}$.

En d'autres termes, et avec les notations précédentes :
- les valeurs propres de A sont les valeurs propres de u, donc le spectre de A est celui de u ;
- les vecteurs propres de A sont les colonnes des coordonnées (dans $\mathcal{B}$) des vecteurs propres de u ;

Proposition 2.1.2 (caractérisation des valeurs propres pour une matrice)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit λ un scalaire.
Les propositions suivantes sont trois façons équivalentes de dire que λ est valeur propre de A :
a) la matrice $\lambda I_n - A$ n'est pas inversible ;
b) le déterminant $\det(\lambda I_n - A)$ est nul ;
c) il existe une matrice X non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AX = \lambda X$.

L'équivalence de ces trois formulations est *vraiment* évidente. □

Exercice 2.1 (⇝ **corrigé**)
Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$.

Exercice 2.2 (⇝ **corrigé**)
Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
Soit T définie sur E par $T(f)(0) = f(0)$ et par $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
a) Montrer que T est un endomorphisme de E.
b) Déterminer le noyau de T. L'application T est-elle injective ? surjective ?

c) Indiquer ses valeurs propres non nulles et les sous-espaces propres associés.

Exercice 2.3 (⇝ **corrigé**)

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a) Soit $\lambda \neq 0$. On suppose que λ est valeur propre de vu. Montrer que λ est valeur propre de uv.

b) Étudier le cas particulier $\lambda = 0$. D'abord si E est de dimension finie, puis dans le cas général.

Remarque sur les matrices à coefficients réels

Si une matrice A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On peut alors se poser la question de ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$ ou de ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

Par exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$

La seule valeur propre réelle de A est donc 1. Les valeurs propres complexes de A sont 1, i, et $-i$.

On exprimera parfois une telle nuance en écrivant $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, i, -i\}$.

Proposition 2.1.3 (éléments propres de deux matrices semblables)

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que A et B sont semblables. Il existe donc P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Alors $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A)$. Plus précisément, la colonne X est vecteur propre de B si et seulement si la colonne PX est vecteur propre de A (et pour la même valeur propre).

Avec les notations ci-dessus, et si X est une matrice colonne de hauteur n, on a les équivalences :

$BX = \lambda X \Leftrightarrow P^{-1}APX = \lambda X \Leftrightarrow APX = \lambda PX \Leftrightarrow AY = \lambda Y$ (avec $Y = PX$). □

Le résultat précédent est cohérent avec le fait que A et B sont semblables si et seulement si elles sont susceptibles de représenter un même endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, chacune dans une certaine base de E. On a alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(u)$.

Proposition 2.1.4 (deux matrices transposées l'une de l'autre ont le même spectre)

Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres.

C'est une simple conséquence du fait qu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant :

$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \det((\lambda I_n - A)^\top) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A^\top) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(A^\top)$. □

2.1.3 Propriétés générales des éléments propres

Les résultats suivants, énoncés en termes d'endomorphismes, ont leur équivalent en termes matriciels.

Proposition 2.1.5 (stabilité des sous-espaces propres pour deux endomorphismes qui commutent)

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Si $uv = vu$ (c'est-à-dire si u et v commutent), tout sous-espace propre de u est stable par v.

Plus généralement, si les endomorphismes u et v commutent et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, les sous-espaces propres de $P(u)$ sont stables par $Q(v)$.

Si u et v commutent alors $P(u)$ et $Q(v)$ commutent (cf. la dernière remarque de la sous-section 1.2.1).
Dans ces conditions, pour tout λ de $\mathbb{K}$, $Q(v)$ commute avec $P(u) - \lambda\text{Id}$.
Il en résulte que $\text{Ker}(P(u) - \lambda\text{Id})$ est stable par $Q(v)$ (cf proposition 1.2.10).
Autrement dit, $Q(v)$ « stabilise » les sous-espaces propres de $P(u)$.
En particulier (en choisissant $P = Q = X$), v stabilise les sous-espaces propres de u. □

Proposition 2.1.6 (les sous-espaces propres sont en somme directe)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de p valeurs propres distinctes de u.
Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe.
En d'autres termes : si x_i est vecteur propre pour λ_i (avec $1 \leqslant i \leqslant p$), la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre.

On procède par récurrence sur p, le résultat étant évident si $p = 1$.
On suppose donc que la propriété est vraie au rang $p \geqslant 1$ et on se donne une famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p+1}$ de $p+1$ valeurs propres distinctes de u.

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p+1}$ une famille de vecteurs, avec x_i dans E_{λ_i} pour chaque i, telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} x_i = \overrightarrow{0}$ (1).
On applique f à (1) et on obtient l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = \overrightarrow{0}$ (2), puis on forme (2)$-\lambda_{p+1}$(1).
On obtient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i - \lambda_{p+1})x_i = \overrightarrow{0}$ donc : $\forall\, i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_{p+1})x_i = \overrightarrow{0}$ (hypothèse de récurrence).
Les λ_i étant distincts deux à deux, il en découle $x_i = \overrightarrow{0}$ pour tout i de $[\![1, p]\!]$.
L'égalite (1) donne alors $x_{p+1} = \overrightarrow{0}$, ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence. □

Conséquence importante

Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.
Il en est de même pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Quelques remarques à méditer

- Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ et μ dans $\mathbb{K}$. Soit $v = u - \mu\,\text{Id}$. Alors $\text{Sp}(v) = \{\lambda - \mu,\ \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.
  Plus précisément, si λ est dans $\text{Sp}(u)$, on a $E_{\lambda-\mu}(v) = E_\lambda(u)$.

  $x \in E_\lambda(u) \Leftrightarrow u(x) = \lambda x \Leftrightarrow (u - \mu\text{Id})(x) = (\lambda - \mu)x \Leftrightarrow v(x) = (\lambda - \mu)x \Leftrightarrow x \in E_{\lambda-\mu}(v)$. □

- Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, soit m dans $\mathbb{N}^*$.
  Si x est vecteur propre de u pour λ, alors x est vecteur propre de u^m pour λ^m.

  En effet : $u(x) = \lambda x \Rightarrow u^2(x) = u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 u(x)$, avant une récurrence évidente. □

- Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, soit P dans $\mathbb{K}[X]$.
  Si x est vecteur propre de u pour λ, alors x est vecteur propre de $P(u)$ pour $P(\lambda)$.

  En effet : si $P = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$, alors $P(u) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k u^k$ donc $P(u)(x) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k u^k(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$. □

- En particulier, si P est un polynôme annulateur de u, toute valeur propre de u est une racine de P.

On suppose donc que $P(u) = 0$ et que x est vecteur propre de u pour la valeur propre λ.
Alors $\overrightarrow{0} = P(u)(x) = P(\lambda)x$ (avec $x \neq \overrightarrow{0}$) et il en résulte $P(\lambda) = 0$. □

La réciproque est fausse : les racines d'un polynôme annulateur *quelconque* de u ne sont pas nécessairement des valeurs propres de u. Songer par exemple que si A est un polynôme annulateur de u, alors tout multiple BA de A est encore un polynôme annulateur de u.

– Si u est endomorphisme nilpotent, alors : $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

Si u est nilpotent, il n'est pas injectif, donc 0 appartient au spectre de u.
Réciproquement, soit $m \geqslant 1$ tel que $u^m = 0$ (donc tel que $P = X^m$ soit un polynôme annulateur de u).
Toute valeur propre de u est racine de $P(X) = X^m$ donc est nulle. Conclusion $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$. □

– Si A est une matrice nilpotente, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

C'est une simple traduction matricielle du résultat précédent.

2.2 Polynôme caractéristique

2.2.1 Mise en route, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$

On va introduire la notion de polynôme caractéristique sur des exemples simples.

▷ **Dans** $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

On se donne $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pour tout x de $\mathbb{K}$, on considère $P(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix}$.

On trouve $P(x) = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$.

Ainsi P est un polynôme unitaire de degré 2 qui s'exprime à l'aide de $\mathrm{tr}(A)$ et de $\det(A)$.

Mais il y a mieux, car on constate que :

$$P(A) = A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le polynôme $P(x) = \det(xI_2 - A)$ est un polynôme annulateur de A (à suivre...)

▷ **Dans** $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et on pose $\det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-a & -b & -c \\ -a' & x-b' & -c' \\ -a'' & -b'' & x-c'' \end{vmatrix}$.

Remarque : pour $x = 0$, il est clair que ce déterminant vaut $\det(-A)$, c'est-à-dire $-\det(A)$.

On calcule $\det(xI_3 - A)$ par développement par rapport à la première colonne (par exemple) :

$$\begin{aligned} \det(xI_3 - A) &= (x-a)\begin{vmatrix} x-b' & -c' \\ -b'' & x-c'' \end{vmatrix} + a'\begin{vmatrix} -b & -c \\ -b'' & x-c'' \end{vmatrix} - a''\begin{vmatrix} -b & -c \\ x-b' & -c' \end{vmatrix} \\ &= (x-a)(x^2 - (b'+c'')x + b'c'' - b''c') + a'(-bx + bc'' - b''c) - a''(cx + bc' - b'c) \\ &= x^3 - (a+b'+c'')x^2 + \alpha x - \det(A) = x^3 - \mathrm{tr}(A)x^2 + \alpha x - \det(A) \end{aligned}$$

On n'a pas explicité le coefficient α (qui n'est pas important ici), et pour ce qui est de la valeur du coefficient constant, cela résulte de la remarque préliminaire.

Sur cet exemple, on constate que $x \mapsto \det(xI_3 - A)$ est polynomiale de degré 3, unitaire, et que ses coefficients de degré 2 et 0 dépendent de façon simple de la matrice A.

Plus précisément, on a obtenu : $\forall x \in \mathbb{K},\ \det(xI_3 - A) = x^3 - \operatorname{tr}(A)x^2 + \alpha x - \det(A)$.

À titre d'exemple, considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $P(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -2 & x-1 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3 - 4(x-1) = (x-1)(x+1)(x-3)$.

On constate que :

$$\begin{aligned} P(A) = (A - I_3)(A + I_3)(A - 3I_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Là encore, $P(x) = \det(xI_3 - A)$ est un polynôme annulateur de A (à suivre...)

2.2.2 Définition du polynôme caractéristique

On se propose maintenant de généraliser cette observation à des matrices carrées d'ordre n.

Proposition 2.2.1 (un polynôme attaché à une matrice carrée)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale unitaire de degré n.

Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{K},\ \det(xI_n - A) = x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Si $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont les colonnes d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on va noter $\det(M) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, on note A_j la j-ième colonne de A, et on note U_j la j-ième colonne de la matrice I_n.

Avec ces notations, on a $\det(xI_n - A) = \det(xU_1 - A_1, xU_2 - A_2, \ldots, xU_n - A_n)$.

On sait que l'application $M \mapsto \det(M)$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes de M.

On utilise cette « multi-linéarité » pour développer $\det(xI_n - A) = \det(xU_1 - A_1, xU_2 - A_2, \ldots, xU_n - A_n)$ $(\star)$.

Chaque « terme » de ce développement est obtenu de la façon suivante :

- On choisit une partie J quelconque de $[\![1, n]\!]$;
- Pour tous les indices j de J, on sélectionne la colonne A_j dans la composante $xU_j - A_j$ de $(\star)$;
- Pour tous les autres indices j, on sélectionne la colonne U_j dans la composante $xU_j - A_j$ de $(\star)$;
- Soit M_J la matrice formée de ces sélections successives de colonnes ;

  On constate que si $J = \emptyset$ alors $M_J = I_n$, et que si $J = [\![1, n]\!]$ alors $M_J = A$.

  Il est clair enfin que la matrice M_J est constante relativement à la variable x.
- Le terme correspondant dans le développement de $(\star)$ est : alors $x^{n-\operatorname{Card}(J)}(-1)^{\operatorname{Card}(J)} \det(M_J)$.

  On a en effet factorisé -1 pour chacune des colonnes d'indice j de J, et x dans les autres.

Ainsi : $\det(xI_n - A) = \displaystyle\sum_{J \subset [\![1,n]\!]} x^{n-\operatorname{Card}(J)}(-1)^{\operatorname{Card}(J)} \det(M_J)$.

Il est plus simple de réordonner cette somme suivant les valeurs du cardinal p de la partie J de $[\![1,n]\!]$.

On obtient : $\det(xI_n - A) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p(-1)^p x^{n-p}$, avec $\alpha_p = \sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(J)=p}} \det(M_J)$.

On trouve $\alpha_0 = \det(M_\emptyset) = \det(I_n) = 1$ et $\alpha_n = \det(M_{[\![1,n]\!]}) = \det(A)$.

Ainsi $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale unitaire de degré n, et son terme constant est $(-1)^n \det(A)$.

On s'intéresse au terme $-\alpha_1 x^{n-1}$ de degré $n-1$ dans ce polynôme. On trouve $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{n} \det(M_{\{j\}})$.

Or $M_{\{j\}}$ est la matrice I_n dans laquelle la j-ième colonne serait remplacée par la j-ième colonne de A.

On trouve facilement $\det(M_{\{j\}}) = a_{j,j}$. Ainsi $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = \mathrm{tr}(A)$.

Conclusion :

– l'application $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale, unitaire, de degré n.

– pour tout x de $\mathbb{K}$, on a : $\det(xI_n - A) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Remarque : il était évident que le coefficient constant de $\det(xI_n - A)$ serait égal à $(-1)^n \det(A)$. □

Définition 2.2.1 (polynôme caractéristique d'une matrice carrée)
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On note $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$, et on l'appelle le *polynôme caractéristique* de A.
Rappelons que : $\chi_A(x) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Remarques

– On notera en particulier que le coefficient constant du polynôme χ_A est $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$.
Ce coefficient est non nul si et seulement si A est inversible, ce qui est logique : dire que $\chi_A(0) \neq 0$, c'est dire que 0 n'est pas valeur propre de A, c'est donc dire que A est inversible.

– On commet couramment l'abus de langage qui consiste à écrire $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
Le programme ne prévoit en effet que des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et ici X est dans $\mathbb{K}[X]$.

– Si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale ou triangulaire, alors $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{i,i})$.

Proposition 2.2.2 (polynôme caractéristique de la matrice transposée)
Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices A et $A^\top$ ont le même polynôme caractéristique.

En effet : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \det((XI_n - A)^\top) = \det(XI_n - A^\top) = \chi_{A^\top}(X)$. □

Proposition 2.2.3 (polynôme caractéristique de deux matrices semblables)
Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elles ont le même polynôme caractéristique.

Si $B = P^{-1}AP$: $\chi_B(X) = \det(XI_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(XI_n - A)P) = \det(XI_n - A) = \chi_A(X)$. □

Rappel : soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$. Le déterminant (resp. la trace) de u est le déterminant (resp. la trace) de la matrice A de u dans une base *quelconque* $\mathcal{B}$ de E. Deux matrices susceptibles de représenter u sont en effet semblables (même déterminant, même trace).

Exercice 2.4 (⇝ **corrigé**)
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible. Exprimer $\chi_{M^{-1}}$ en fonction de χ_M.

Exercice 2.5 (⇝ **corrigé**)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Définition 2.2.2 (polynôme caractéristique d'un endomorphisme)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Le *polynôme caractéristique* χ_u de u est celui de la matrice A de u dans une base quelconque $\mathcal{B}$.
Autrement dit, pour tout x de $\mathbb{K}$, on pose $\chi_u(x) = \det(xI_n - A) = \det(x\,\mathrm{Id} - u)$.
Par abus de langage, on note $\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - u)$. C'est un polynôme unitaire de degré n.

Remarques

– On a encore le résultat : $\chi_u(X) = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
– Le polynôme caractéristique d'une homothétie $x \mapsto u(x) = \lambda x$ de E est $\chi_u(X) = (X - \lambda)^n$.

2.2.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition 2.2.4 (les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique)
Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit λ un scalaire.
Alors λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique χ_A.

On a le même énoncé pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie : dire que λ est valeur propre de u, c'est dire que λ est racine du polynôme caractéristique χ_u.

Évident après la prop.2.1.2 et déf.2.2.2 : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$. □

En conformité avec le programme, on retiendra donc l'expression : « les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique ».

Définition 2.2.3 (multiplicité d'une valeur propre)
Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit λ une valeur propre de A.
On appelle *multiplicité* de λ (en tant que valeur propre de A) la multiplicité m_λ de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A.
On parle de valeur propre *simple*, *double*, *triple*, etc. si cette multiplicité vaut 1, 2, 3, etc.
On parle de valeur propre *multiple* si cette multiplicité est strictement supérieure à 1.

On a le même énoncé pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie : la multiplicité d'une valeur propre λ de u est celle de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_u.

Cas particulier important : les valeurs propres d'une matrice triangulaire (et en particulier celles d'une matrice diagonale !) sont ses coefficients diagonaux (et la multiplicité d'une telle valeur propre est son nombre d'occurrences sur la diagonale).

Proposition 2.2.5 (dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$)
Soit n un entier strictement positif. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, admet exactement n valeurs propres (chacune d'elles étant comptée autant de fois que sa multiplicité).

Sachant que le polynôme caractéristique de A ou de u est de degré n et est scindé, et comme tenu de la proposition 2.2.4 et de la définition 2.2.3, c'est évident. □

Exercice 2.6
Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.
On suppose que u et v commutent. Montrer que f et g ont au moins un vecteur propre en commun.

Soit λ une valeur propre de u (il en existe car on est dans $\mathbb{C}$). Soit $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé.
Les applications u et v commutent : l'ensemble $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda Id)$ est donc stable par v (cf prop. 2.1.5).
Soit w la restriction de v à $E_\lambda(u)$ (dont la dimension est au moins égale à 1).
L'endomorphisme w de $E_\lambda(u)$ possède lui-même au moins une valeur propre μ.
Soit x un vecteur propre de w (et donc de v) pour la valeur propre μ.
Alors x est un vecteur propre propre commun à u (pour la valeur propre λ) et à v (pour la valeur propre μ).

Proposition 2.2.6 (cas où le polynôme caractéristique est scindé)
Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On suppose que χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$ (c'est toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Alors la trace $\operatorname{tr}(A)$ de A est égale à la somme des valeurs propres de A.
De même, le déterminant $\det(A)$ est égal au produit des valeurs propres de A.
NB : dans cette somme (ce produit), chaque valeur propre est comptée autant de fois que sa multiplicité.

On sait que les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.
On sait aussi que le polynôme χ_A est unitaire de degré n, et on suppose de plus qu'il est scindé.
Il s'écrit donc sous forme factorisée : $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) \quad (\star)$.
Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement distincts) sont donc ici les valeurs propres de A.
Par développement, l'égalité $(\star)$ donne : $\chi_A(X) = X^n - \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
Mais on sait aussi que $\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.
Par comparaison, on obtient les deux égalités : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(A)$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$. □

Proposition 2.2.7 (valeurs propres complexes d'une matrice à coefficients réels)
Soit λ une valeur propre complexe *d'une matrice carrée A à coefficients* réels.
Alors $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre complexe de A, et avec la même multiplicité.
De plus, si la matrice-colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifie $A\,X = \lambda\,X$, alors on a l'égalité $A\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.

On considère donc A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais on « voit » A comme un élément particulier de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est à coefficients réels, et il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
On sait que sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit : $A = \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{\mu_i} \prod_{j=1}^{q} \big((X - \lambda_j)^{m_j} (X - \overline{\lambda_j})^{m_j}\big)$ où :

- les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les racines réelles éventuelles distinctes de $\chi_A(X)$, c'est-à-dire les valeurs propres réelles éventuelles distinctes de A.
  les entiers strictement positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ sont leurs multiplicités respectives.
- les nombres complexes non réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ et leurs conjugués respectifs $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_q}$ sont les racines complexes non réelles éventuelles distinctes de $\chi_A(X)$, c'est-à-dire les valeurs propres complexes non réelles éventuelles distinctes de A, et $m_1, m_2, \ldots, m_q$ sont leurs multiplicités respectives.

Soit λ (donc $\overline{\lambda}$) une valeur propre complexe non réelle de A.

Pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\overline{AX} = \overline{A}\,\overline{X} = A\overline{X}$ car A est à coefficients réels.

On en déduit l'équivalence : $A\,X = \lambda\,X \;\Leftrightarrow\; A\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, c'est-à-dire : $X \in E_\lambda(A) \;\Leftrightarrow\; \overline{X} \in E_{\overline{\lambda}}(A)$. □

2.2.4 Polynôme caractéristique et sous-espaces stables

Proposition 2.2.8 (polynôme caractéristique, pour une matrice triangulaire par blocs)

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, triangulaire par blocs : $M = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$. *Alors* $\chi_M = \chi_P\,\chi_S$.

Cette propriété se généralise de façon évidente à un nombre quelconque de blocs diagonaux.

Il suffit d'appliquer la proposition 1.3.2.

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M) = \det\begin{pmatrix} XI_p - P & -Q \\ 0 & XI_{n-p} - S \end{pmatrix} = \det(XI_p - P)\det(XI_{n-p} - S) = \chi_P(X)\,\chi_S(X).\quad \square$$

Proposition 2.2.9 (polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sous-espace stable)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par u. Soit v la restriction de u à F.

Alors le polynôme caractéristique χ_v de v divise le polynôme caractéristique χ_u de u.

Il suffit d'utiliser la caractérisation matricielle de la stabilité d'un sous-espace (voir sous-section 2.2.4).

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F (voir définition 1.1.5), donc complétée à partir d'une base $\mathcal{B}_F$ de F.

La matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit $M = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$, avec P dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Avec ces notations, P est donc la matrice dans la base $\mathcal{B}_F$ de la restriction v de u à F.

On a alors : $\chi_M(X) = \chi_P(X)\,\chi_S(X)$, c'est-à-dire $\chi_u(X) = \chi_v(X)\,\chi_S(X)$, donc $\chi_v(X)$ divise $\chi_u(X)$. □

Proposition 2.2.10 (majoration de la dimension d'un sous-espace propre)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.

Soit λ une valeur propre de u, de multiplicité m_λ. Soit d_λ la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$.

Alors on a les inégalités : $1 \leqslant d_\lambda \leqslant m_\lambda$.

Par définition, un sous-espace propre n'est jamais réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, donc $d_\lambda \geqslant 1$.

Par hypothèse, le polynôme caractéristique de u s'écrit $\chi_u(X) = (X - \lambda)^{m_\lambda} Q(X)$, avec $Q(\lambda) \neq 0$.

Par ailleurs, le sous-espace $E_\lambda(u)$ est évidemment stable par u : la restriction v de u à $E_\lambda(u)$ est l'homothétie $x \mapsto \lambda x$, donc son polynôme caractéristique est $\chi_v(X) = (X - \lambda)^{d_\lambda}$

Enfin, on sait que $\chi_v(X)$ divise $\chi_u(X)$: il en découle $d_\lambda \leqslant m_\lambda$. □

On a un énoncé analogue pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On retiendra que « *la dimension d'un sous-espace propre est toujours inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante* ».

Conséquence importante : dans le cas d'une valeur propre simple (c'est-à-dire de multiplicité 1), le sous-espace propre associé est nécessairement une droite vectorielle.

2.3 Diagonalisation

2.3.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 2.3.1 (en dimension finie, endomorphisme diagonalisable)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.
On dit que u est *diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
On dit alors que $\mathcal{B}$ est une *base de diagonalisation* de u.

Dire que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale, c'est dire que $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de u.

Définition 2.3.2 (matrice carrée diagonalisable)
On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
On dit alors que $D = P^{-1}AP$ est une *réduite diagonale* de A.

Si A est diagonalisable et si B est semblable à A, alors B est elle-même diagonalisable.

▷ Équivalence des deux définitions précédentes

Soit u un endomorphisme de E, de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E.

- On suppose que u est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}'$ une base de diagonalisation de u.
  Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
  Avec ces notations, la matrice (diagonale) de u dans $\mathcal{B}'$ est $D = P^{-1}AP$. Donc A est diagonalisable.
- Réciproquement, on suppose que A est diagonalisable.
  Soit P une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.
  On interprète P comme la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ de E.
  La matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $P^{-1}AP = D$, donc u est diagonalisable.

En résumé, un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (de dimension finie $n \geqslant 1$) est diagonalisable (au sens de la définition 2.3.1) si et seulement si sa matrice A (dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E) est diagonalisable (au sens de la définition 2.3.2). Réciproquement, dire qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, c'est dire que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ayant pour matrice A dans une certaine base est lui-même diagonalisable.

▷ Remarques terminologiques

On identifie souvent une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'endomorphisme $\widehat{A}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par $X \mapsto AX$ (dans ce cas A est la matrice de l'endomorphisme $\widehat{A}$ dans la base canonique).

Dire que la matrice A est diagonalisable, c'est dire que l'endomorphisme $\widehat{A}$ est diagonalisable, et l'égalité $D = P^{-1}AP$ (où D est diagonale) exprime que la matrice inversible P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à une base de vecteurs propres de l'endomorphisme $\widehat{A}$.

Avec les notations ci-dessus, les coefficients de la diagonale de D sont les valeurs propres de $\widehat{A}$ (c'est-à-dire les valeurs propres de A), chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

Dans la pratique, il n'y a pas grand risque à identifier A et $\widehat{A}$.

Proposition 2.3.1 (conditions équivalentes à la diagonalisabilité d'un endomorphisme)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) l'endomorphisme u est diagonalisable.

b) l'espace E est la somme (directe) des sous-espaces propres de u.

c) la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension n de E.

d) le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout λ de $\mathrm{Sp}(u)$, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est égale à la multiplicité de λ comme racine de χ_u.

On note comme d'habitude $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. On note m_λ la multiplicité d'une valeur propre λ, et d_λ la dimension du sous-espace propre associé E_λ. On sait que $1 \leqslant d_\lambda \leqslant m_\lambda$.

Soit $F = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$ la somme (directe) des différents sous-espaces propres de u.

- $(a) \Rightarrow (b)$: on suppose que u est diagonalisable. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de diagonalisation de u.
  Chaque e_i est un vecteur propre de u, donc est dans un certain E_λ, donc est dans F.
  Tout vecteur de E est combinaison linéaire des e_i donc est dans F. Ainsi $F = E$.
- $(b) \Rightarrow (c)$: par hypothèse $E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$, donc $\dim(E) = n = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} d_\lambda$.
- $(c) \Rightarrow (d)$: On sait que $\chi_A(X)$ est unitaire et de degré n.
  On sait que $\chi_A(X)$ est divisible par $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$ (définition des m_λ), et en particulier $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} m_\lambda \leqslant n$.
  L'hypothèse $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} d_\lambda = n$ et les égalités $d_\lambda \leqslant m_\lambda$ impliquent $d_\lambda = m_\lambda$ pour tout λ de $\mathrm{Sp}(u)$.
  Ainsi $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} m_\lambda = n$ et, pour des raisons de degré : $\chi_A(X) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$. □

L'énoncé précédent possède une traduction matricielle immédiate :

Proposition 2.3.2 (conditions équivalentes à la diagonalisabilité d'une matrice)
Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) la matrice A est diagonalisable.

b) la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n.

c) le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout λ de $\mathrm{Sp}(A)$, la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ comme racine de χ_A.

Exercice 2.7 (⇝ **corrigé**)

Dire, sans calculs, pourquoi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 2.8 (⇝ **corrigé**)

Donner une CNS sur a, b, c, d, e, f pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 2.9 (⇝ **corrigé**)

Dire pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *n'est pas* diagonalisable.

Proposition 2.3.3 (une condition suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.
Si u admet n valeurs propres distinctes, u est diagonalisable, et les sous-espaces propres sont des droites.

Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n valeurs propres distinctes de u (c'est le maximum, puisque $\dim(E) = n$).
On sait que les sous-espaces propres E_{λ_i} sont non réduits à $\{\overrightarrow{0}\}$ et qu'ils sont en somme directe.
Ainsi : $n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) = \dim\Big(\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} E_{\lambda_i}\Big) \leqslant n$, ce qui exige $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$ pour tout i.
Ainsi E est somme directe des sous-espaces propres E_{λ_i} (ce sont des droites), et u est diagonalisable. □

Le résultat précédent possède bien sûr une interprétation matricielle :

Proposition 2.3.4 (une condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice)
Si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable (et les sous-espaces propres sont des droites de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

Les deux résultats précédents n'expriment que des conditions suffisantes !
Par exemple si u est une homothétie de rapport λ, alors u est diagonalisable et pourtant u n'a pour seule valeur propre que λ, avec la multiplicité n.
Réciproquement, si u n'a qu'une seule valeur propre λ, de multiplicité n, alors u est diagonalisable si et seulement si u est l' homothétie de rapport λ.
De même si A (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) n'a que la valeur propre λ (ce qui est le cas par exemple si A est triangulaire avec des λ sur toute la diagonale), alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda \mathrm{I}_n$.

Exercice 2.10 (⇝ **corrigé**)

a) Montrer que $\varphi \colon P \to X(X-1)P' - nXP$ définit un endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$.
b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
c) Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Exercice 2.11 (⇝ **corrigé**)
Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, avec $\dim(E) = n \geqslant 1$, ayant n valeurs propres distinctes.
Soit v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer $uv = vu$ si et seulement si v s'écrit sous la forme $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$.

▷ **Diagonalisabilité « dans $\mathbb{R}$ » ou « dans $\mathbb{C}$ » d'une matrice réelle**

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels.

– Si A est diagonalisable « dans $\mathbb{R}$ » alors elle l'est « dans $\mathbb{C}$ » (avec les mêmes valeurs propres).
  L'égalité $A = PDP^{-1}$ (avec D diagonale et P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) reste en effet vraie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
– En revanche, la matrice A peut très bien être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ sans l'être dans $\mathbb{R}$, notamment si certaines des valeurs propres de A sont complexes non réelles.
– Par exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$.
  La matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (son polynôme caractéristique n'est pas scindé).
  Si on considère A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, elle y est diagonalisable (deux valeurs propres distinctes : i et $-i$).

2.3.2 Applications de la diagonalisation

▷ **Pratique de la diagonalisation**

– On se propose de diagonaliser (si elle est diagonalisable !) une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A, puis les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.
  Si χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$, alors A n'est pas diagonalisable et on arrête là.
  Sinon, pour chaque λ de $\mathrm{Sp}(A)$ (de multiplicité m_λ dans χ_A), on résout $AX = \lambda X$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
  Les solutions forment le sous-espace propre $E_\lambda(A)$, dont on trouve la dimension d_λ et une base $\mathcal{B}_\lambda$.
  Si pour l'un des λ on a l'inégalité stricte $d_\lambda < m_\lambda$, alors A n'est pas diagonalisable.
  Sinon la juxtaposition des $\mathcal{B}_\lambda$ donne une base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres de A.
  Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, soit $D = P^{-1}AP$.
  La matrice D est ici diagonale : ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, dans l'ordre qui correspond à celui des vecteurs propres qui forment la base $\mathcal{B}$.
– Les calculs précédents peuvent s'effectuer avec la méthode du pivot.
  On part de la matrice $A_\lambda = \lambda \mathrm{I_n} - A$ que l'on transforme, par des opérations sur les lignes, en une matrice triangulaire T_λ.
  Les valeurs propres de A sont les λ tels que T_λ est non inversible c'est-à-dire les valeurs qui annulent au moins un coefficient diagonal de T_λ.
  Pour chacune de ces valeurs, le sous espace propre est obtenu en résolvant le système $T_\lambda X = 0$, qui est équivalent au système $AX = \lambda X$.

Exercice 2.12 (⇝ **corrigé**)
Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.13 (⇝ **corrigé**)

Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$ si possible, sinon dans $\mathbb{C}$.

▷ **Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable**

Si A est diagonalisable, et si $A = PDP^{-1}$ (où D est diagonale), alors : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$.

On généralise aux exposants entiers relatifs si A est inversible, c'est-à-dire si $\mathrm{Sp}(A)$ ne contient pas 0.

Remarque : si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, on sait que $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ pour tout entier k.

Attention tout de même avec $k = 0$ (car $D^0 = I_n$) si l'un des λ_i est nul (ne pas écrire $\lambda_i^0 = 0$).

Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $k \geqslant 1$ mais pas pour $k = 0$.

Exercice 2.14 (⇝ **corrigé**)

Soit a, b, c dans $\mathbb{K}$. Calculer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ (sans préciser les multiplicités).

Montrer qu'il existe une matrice P inversible, indépendante de a, b, c, telle $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Indication : exprimer $M(a, b, c)$ en fonction de I et de $J = M(0, 1, 0)$.

Exercice 2.15 (⇝ **corrigé**)

a) Montrer que si D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux distincts, alors les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

b) Déterminer les solutions X (éventuelles) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de l'équation $X^2 + X = A$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.16 (⇝ **corrigé**)

Déterminer les solutions de (E) : $X^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

▷ **Systèmes de suites récurrences de pas** 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$, ..., $(w_n)_{n\geqslant 0}$ des suites de $\mathbb{K}$. On pose $X_n = (u_n, v_n, \dots, w_n)^\top$.

On suppose qu'il existe une matrice M telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = AX_{n-1}$.

Dans ces conditions, pour tout $n \geqslant 0$, on a $X_n = A^n X_0$, ce qui nécessite le calcul de A^n.

▷ **Étude d'une récurrence linéaire d'ordre** p

On se donne un entier $p \geqslant 1$, et une famille $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ de p éléments de $\mathbb{K}$.

On se propose d'étudier l'ensemble $(\mathcal{S})$ des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}$ qui vérifient la relation :

$$(R_L) : \ \forall n \geqslant p,\ u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2} + \cdots + \alpha_p u_{n-p} \text{ c'est-à-dire : } \forall n \geqslant p,\ u_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_{n-k}$$

On dit que (R_L) est une relation de récurrence linéaire d'ordre p.

Soit $P = X^p - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k}$. On dit que $(\mathcal{C})$: $P(x) = 0$ est l'« équation caractéristique » associé à (R_L).

Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_{n-p+1} \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_{n-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ u_{n-3} \\ \vdots \\ u_{n-p} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $X_n = AX_{n-1}$.

On a va noter (R_A) cette relation matricielle, qui est *équivalente* à la relation linéaire (R_L).
Si on sait diagonaliser A, on est donc ramené au problème précédent (calcul des puissances de A).

Proposition 2.3.5 (complément : polynôme caractéristique d'une « matrice compagnon »)

Avec les notations précédentes, on a : $\chi_A = X^p - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k} = X^p - \alpha_1 X^{p-1} - \alpha_2 X^{p-2} - \cdots - \alpha_p$.

On dit que A est la « matrice compagnon » du polynôme $X^p - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k}$.

Autrement dit, le polynôme caractéristique de la matrice-compagnon A (qui apparaît dans la relation matricielle (R_A)) est celui qui apparaît dans l'équation caractéristique associé à (R_L).

Notons $P(X) = X^p - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k}$. On forme le « déterminant caractéristique » de A.

On applique l'opération $\mathrm{C}_p \leftarrow \mathrm{C}_p + X\mathrm{C}_{p-1} + X^2\mathrm{C}_{p-2} + \cdots + X^{p-1}\mathrm{C}_1$ (qui ne modifie pas le déterminant) :

$$\det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ -1 & X & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & X & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & -\alpha_{p-1} & P(X) \\ -1 & X & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & X & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne, et il reste un déterminant triangulaire d'ordre $p-1$:

$$\det(XI_n - A) = (-1)^{p+1}P(X) \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{p+1}P(X)(-1)^{p-1} = X^p - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k}. \quad \square$$

2.4 Diagonalisation et polynômes annulateurs

Proposition 2.4.1 (théorème de Cayley-Hamilton, pour un endomorphisme)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit χ_u le polynôme caractéristique de u (on sait qu'il est unitaire de degré n).
Alors $\chi_u(u) = 0$. Le polynôme caractéristique de u est donc un polynôme annulateur de u.

Il s'agit de prouver l'égalité $\chi_u(u)(x) = \overrightarrow{0}$, pour tout vecteur non nul x de E (pour $x = \overrightarrow{0}$ c'est trivial).
Dans toute la suite de cette démonstration, on fixe un tel vecteur x non nul.
Il existe un plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que la famille $x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), u^p(x)$ soit liée.
Il existe donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ dans $\mathbb{K}$ tels que : $u^p(x) = \alpha_1 u^{p-1}(x) + \alpha_2 u^{p-2}(x) + \cdots + \alpha_{p-1} u(x) + \alpha_p x$.
Soit F le sous-espace de E engendré par les vecteurs libres $u^{p-1}(x), u^{p-2}(x), \ldots, u(x), x$.
Il est clair que le sous-espace F, de dimension p, est stable par u.
(cela résulte notamment de l'expression de $u^p(x)$).
Soit v la restriction de u à F.
La matrice de v dans la base $u^{p-1}(x), u^{p-2}(x), \ldots, u(x), x$ est $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \alpha_p & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
On reconnaît la transposée de la matrice-compagnon
du polynôme $P(X) = X^p - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^{p-k}$ (voir proposition 2.3.5).
D'après cette même proposition le polynôme caractéristique de v, donc de A, est $\chi_v(X) = P(X)$.
Or la proposition 2.2.9 dit que χ_v divise χ_u : il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_u(X) = Q(X)P(X)$.
En particulier $\chi_u(u) = Q(u)P(u)$ (cf proposition 1.2.3), donc $\chi_u(u)(x) = Q(u)(P(u)(x))$.
Or $P(u) = u^p - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u^{p-k}$ donc $P(u)(x) = u^p(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u^{p-k}(x) = \overrightarrow{0}$ et c'est fini. □

On a le même énoncé, d'un point de vue matriciel :

Proposition 2.4.2 (théorème de Cayley-Hamilton, pour une matrice carrée)
Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Soit χ_A le polynôme caractéristique de A (on sait qu'il est unitaire de degré n).
Alors $\chi_A(A) = 0$. Le polynôme caractéristique de A est donc un polynôme annulateur de A.

Exercice 2.17
Soit u un automorphisme de E (avec $\dim(E) = n \geqslant 1$). Montrer que u^{-1} est un polynôme en u.

Soit χ_u le polynôme caractéristique de u. On sait que $\chi_u(u) = 0$.
Le coefficient constant de $\chi_u(X) = \det(XI_n - u)$ est $a_0 = (-1)^n \det(u) \neq 0$ (car u est un automorphisme).
On peut donc écrire $\chi_u(X) = XQ(X) + a_0$, puis $uQ(u) + a_0\mathrm{Id} = 0$, puis $u^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}Q(u)$.

Proposition 2.4.3 (deux CNS de diagonalisabilité, pour un endomorphisme)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) l'endomorphisme u est diagonalisable.

b) le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u.

c) l'endomorphisme u admet un polynôme annulateur à racines simples.

– $(a) \Rightarrow (b)$: on suppose u diagonalisable. D'après la proposition 2.3.1, on sait que $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
Soit $P = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$, et soit x dans $E_\lambda(u)$, pour une valeur propre particulière λ.
On peut écrire $P(X) = Q(X)(X - \lambda)$, donc $P(u) = Q(u)(u - \lambda \mathrm{Id})$ (cf proposition 1.2.3).
Il en résulte $P(u)(x) = Q(u)((u - \lambda \mathrm{Id})(x)) = Q(u)(u(x) - \lambda x) = Q(u)(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.
Ainsi $P(u)$ s'annule sur $E_\lambda(u)$, pour chaque λ de $\mathrm{Sp}(u)$, donc $P(u) = 0$ car $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

– $(b) \Rightarrow (c)$: c'est trivial

– $(c) \Rightarrow (a)$: on suppose que $P(u) = 0$, avec $P = \prod\limits_{i=1}^{m}(X - \alpha_i)$, où les α_i sont distincts deux à deux.
Chaque sous-espace $E_{\alpha_i} = \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id})$, s'il n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, est un sous-espace propre de u.
En tout cas, les sous-espaces E_{α_i} sont en somme directe.
Pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, soit $Q_j = \prod\limits_{i \neq j}(X - \alpha_i)$ le quotient de $P(X)$ par $X - \alpha_j$.
Par construction : $(u - \alpha_i \mathrm{Id})Q_i(u) = ((X - \alpha_i)Q_i)(u) = P(u) = 0$, donc $\mathrm{Im}\ (Q_i(u)) \subset E_{\alpha_i}$.
Par construction également, on a $Q_j(\alpha_i) = 0$ si $i \neq j$ et $Q_j(\alpha_j) \neq 0$.
Les polynômes $Q_1, \ldots, Q_m$, de degré $m-1$, sont indépendants dans $\mathbb{K}_{m-1}[X]$, donc en forment une base.
En effet, si $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j Q_j(X) = 0$, la substitution de X par α_i donne $\mu_i = 0$, et ceci pour tout i de $[\![1, m]\!]$.
En particulier, il existe des scalaires $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels que $1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i Q_i(X)$, donc tels que $\mathrm{Id} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i Q_i(u)$.
Ainsi, pour tout x de E : $x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i$, où $x_i = \mu_i Q_i(u)(x)$ est dans E_{α_i}. Ainsi $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} E_{\alpha_i}$.
Si on supprime de cette somme les E_{α_i} réduits à $\{\overrightarrow{0}\}$, on voit que E est somme directe de sous-espaces propres de u : autrement dit, u est diagonalisable. □

On a bien sûr un énoncé analogue pour les matrices :

Proposition 2.4.4 (deux CNS de diagonalisabilité, pour une matrice carrée)
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) la matrice A est diagonalisable.

b) la matrice A admet un polynôme annulateur à racines simples.

c) le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A.

Remarque importante

On retiendra de la démonstration de la proposition 2.4.3 le résultat suivant :

Si $P(u) = 0$, avec $P = \prod_{i=1}^{m}(X - \alpha_i)$ (et les $\alpha_i \neq 2$ à 2), alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\alpha_i}$, avec $E_{\alpha_i} = \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id})$.

Il en résulte que u est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

On a ici une *inclusion* car il est possible que certains $E_{\alpha_i} = \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id})$ soient réduits à $\{\overrightarrow{0}\}$.

Si par exemple $(u+3\mathrm{Id})(u-2\mathrm{Id}) = 0$, alors u est diagonalisable et $E = E_{-3} \oplus E_2$, donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-3, 2\}$.

– si $E_{-3} = \{0\}$ (donc si $-3 \notin \mathrm{Sp}(u)$), alors u est une homothétie de rapport 2.

– si $E_2 = \{0\}$ (donc si $2 \notin \mathrm{Sp}(u)$), alors u est une homothétie de rapport -3.

– sinon le spectre de u est exactement égal à $\{-3, 2\}$.

Exercice 2.18 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible et diagonalisable.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $B^2 = A$. Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 2.19 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

(produit de Kronecker et diagonalisation par blocs)

Pour tous $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A \otimes M = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A \otimes M)(B \otimes N) = (AB) \otimes (MN)$.
2. Montrer que : A, M inversibles $\Rightarrow A \otimes M$ inversible et $(A \otimes M)^{-1} = A^{-1} \otimes M^{-1}$.
3. Prouver que si A et M sont diagonalisables, alors $A \otimes M$ est diagonalisable.

Proposition 2.4.5 (restriction d'un endomorphisme diagonalisable)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par u.

Si u est diagonalisable, alors la restriction v de u à F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Le sous-espace F, stable par u, est stable par tout polynôme de u (cf proposition 1.2.9).

Par hypothèse, il existe un polynôme P, scindé à racines simples, tel que $P(u) = 0$ (cf proposition 2.4.3).

Si v est la restriction de u à F, alors la restriction de $P(u)$ à F est $P(v)$, donc $P(v) = 0$.

Ainsi v est annulée par le polynôme P scindé à racines simples, donc v est diagonalisable. □

Exercice 2.20 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E, avec $\dim(E) = n \geqslant 1$.

On suppose que $fg = gf$. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base (e) de E.

2.5 Trigonalisation

Définition 2.5.1 (en dimension finie, endomorphisme trigonalisable)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit que u est *trigonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
On dit alors que cette base est une *base de trigonalisation* de u.

Définition 2.5.2 (matrice carrée trigonalisable)
On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.
On dit alors que $T = P^{-1}AP$ est une *réduite triangulaire* de A.

Proposition 2.5.1 (réduite triangulaire et valeurs propres)
Soit A une matrice trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $T = P^{-1}AP$ une réduite triangulaire de A.
Les valeurs propres de A (répétées selon leurs multiplicités) sont les coefficients diagonaux de T.

On sait que les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique (cf proposition 2.2.4).
Enfin, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les coefficients diagonaux de T, on a $\chi_A(X) = \chi_T(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. □

On a bien sûr un résultat analogue dans le cas d'un endomorphisme trigonalisable u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E : si $\mathcal{B}$ est une base de trigonalisation de u et si T est la matrice de u dans cette base, alors les valeurs propres de u (répétées selon leurs multiplicités) sont les coefficients diagonaux de T.

▷ Équivalence des deux définitions précédentes

Soit u un endomorphisme de E, de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E.

– On suppose que u est trigonalisable. Soit $\mathcal{B}'$ une base de trigonalisation de u.
  Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Avec ces notations, la matrice (triangulaire supérieure) de u dans $\mathcal{B}'$ est $T = P^{-1}AP$. Donc A est trigonalisable.

– Réciproquement, on suppose que A est trigonalisable.
  Soit P une matrice inversible et T une matrice triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.On interprète P comme la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ de E.
  La matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est la matrice triangulaire supérieure $P^{-1}AP = T$, donc u est trigonalisable.

En résumé, un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (de dimension finie $n \geqslant 1$) est trigonalisable (au sens de la définition 2.5.1) si et seulement si sa matrice A (dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E) est trigonalisable (au sens de la définition 2.5.2).

Réciproquement, dire qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, c'est dire que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ayant pour matrice A dans une certaine base est lui-même trigonalisable.

Exercice 2.21 (⇝ **corrigé**)

a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe P telle que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) Calculer A^n, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Proposition 2.5.2 (condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité d'un endomorphisme)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.
Alors u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

- Soit u trigonalisable, de matrice T (triangulaire supérieure) dans une base de trigonalisation.
  On a $\chi_u = \chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, où les λ_i sont les coefficients diagonaux de T, donc χ_u est scindé.
- Réciproquement, on procède par récurrence sur $n = \dim(E)$. Si $n = 1$, c'est trivial.
  Soit $n \geqslant 2$: on suppose que la proposition est vraie pour tout $\mathbb{K}$-espace de dimension $n - 1$.
  Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension n, et on suppose que χ_u est scindé.
  Il nous faut prouver que u possède une base de trigonalisation.
  Soit λ_1 une racine du polynôme scindé χ_u, donc une valeur propre de u. Soit e_1 un vecteur propre associé.
  Soit F un supplémentaire de $\mathbb{K}e_1$ dans E, et soit $\mathcal{B}$ une base de F.
  Dans $e_1 \cup \mathcal{B}$, la matrice de u s'écrit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec B dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ (et L est une matrice ligne).
  En fait, B est la matrice dans $\mathcal{B}$ de $v = \pi u$, où π est la projection de E sur F parallèlement à $\mathbb{K}e_1$.
  On sait que $\chi_u = (X - \lambda_1)\chi_v$ (cf proposition 2.2.8).
  Le polynôme χ_v, quotient du polynôme scindé χ_u par $(X - \lambda_1)$, est lui aussi scindé.
  Il en résulte (hypothèse de récurrence) que l'endomorphisme v de F est trigonalisable.
  Soit $\mathcal{B}'$ une base de trigonalisation de v, et soit T la matrice (triangulaire supérieure) de v dans $\mathcal{B}'$.
  Alors la matrice de u dans la base $e_1 \cup \mathcal{B}'$ de E s'écrit $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L' \\ 0 & T \end{pmatrix}$.
  On a formé une base de trigonalisation de u, qui est donc trigonalisable. Cela achève la récurrence. □

Le résultat précédent admet bien sûr une interprétation matricielle :

Proposition 2.5.3 (condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité d'une matrice)
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou encore un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

En particulier : toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, est trigonalisable.

Exercice 2.22 (⇝ **corrigé**)

Trouver P inversible telle que $P^{-1}AP = J$, avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

▷ Une conséquence de la trigonalisabilité

Soit u un endomorphisme trigonalisable de E, avec $\dim(E) = n \geqslant 1$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes.

Soit P un polynôme. Alors $P(u)$ est trigonalisable et ses valeurs propres sont $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$.

En particulier, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, u_k est trigonalisable et ses valeurs propres sont $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$.

Cela se généralise aux exposants entiers négatifs p si A est inversible (c'est-à-dire si $\lambda_i \neq 0$ pour tout i).

Soit $\mathcal{B}$ une base de trigonalisation de u. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

La matrice de $P(u)$ dans $\mathcal{B}$ s'écrit donc $P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & * & \ldots & * \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

Ainsi $P(u)$ est trigonalisable de valeurs propres $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$ (non nécessairement distinctes).

En d'autres termes, on a $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ et $\chi_{P(u)}(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - P(\lambda_i))$.

C'est bien sûr vrai dans le cas particulier $P(X) = X^k$.

Idem si u est inversible (c'est-à-dire si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$), on a l'égalité : $\chi_{u^{-1}}(X) = \prod_{i=1}^{n}\Big(X - \dfrac{1}{\lambda_i}\Big)$ □

On termine par une proposition caractérisant les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Proposition 2.5.4 (caractérisation des matrices carrées nilpotentes)
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) La matrice A est nilpotente (il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$).
b) Le polynôme caractéristique de A est X^n.
c) La matrice A est semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure.
d) La puissance n-ième de A est nulle (donc l'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à n).

- $(a) \Rightarrow (b)$: Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut convenir que A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ça ne change pas le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$, qui reste bien sûr à coefficients réels, ni le fait que A est nilpotente).
  Ainsi A possède une réduite triangulaire T dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de diagonale les valeurs propres de A.
  Mais A est nilpotente, donc $\mathrm{Sp}(A)$ est réduit à $\{0\}$ (cf fin de la sous-section 2.1.3).
  Ainsi T est strictement triangulaire supérieure, et $\chi_A(X) = \chi_T(X) = X^n$.
- $(b) \Rightarrow (c)$: puisque $\chi_A = X^n$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$, A possède une réduite triangulaire T dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Or le spectre de A (c'est-à-dire l'ensemble des racines de $\chi_A(X) = X^n$) est réduit à $\{0\}$.
  Ainsi T (de diagonale les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$) est strictement triangulaire supérieure.
- Soit T une réduite strictement triangulaire supérieure de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  On a $\chi_A(X) = \chi_T(X) = X^n$, donc $A^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
- $(d) \Rightarrow (a)$: évident. □

Le résultat précédent admet bien sûr un équivalent en termes d'endomorphismes :

Proposition 2.5.5 (caractérisation des endomorphismes nilpotents)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) L'endomorphisme u est nilpotent (il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0$).
b) Le polynôme caractéristique de u est X^n.
c) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure.
d) La puissance n-ième de u est nulle (donc l'indice de niplotence de u est inférieur ou égal à n).

Exercice 2.23 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Peut-on diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Peut-on la trigonaliser ?