Chapitre 4

Isométries et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

4.1 Isométries vectorielles **76**

4.2 Matrices orthogonales **78**

4.3 Orientation en dimension 2 ou 3 . . . . . **81**

4.3.1 Orientation, bases orthonormales directes 81

4.3.2 Produit mixte en dimension 2 ou 3 82

4.3.3 Produit vectoriel en dimension 3 84

4.4 Isométries du plan **86**

4.4.1 Matrices orthogonales d'ordre 2 86

4.4.2 Angle de rotations et de vecteurs du plan 88

4.4.3 Classification des isométries d'un plan euclidien orienté 90

4.5 Isométries en dimension 3 . . . . . **91**

4.5.1 Orientation d'une droite ou d'un plan en dimension 3 91

4.5.2 Isométries en dimension 3 91

4.6 Endomorphismes symétriques **96**

4.6.1 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien 96

4.6.2 Le théorème spectral 97

4.1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition 4.1.1 (isométries vectorielles, automorphismes orthogonaux)
Soit E un espace euclidien. Soit u un endomorphisme de E.
On dit que u est une *isométrie vectorielle* (ou encore : un *automorphisme orthogonal*) si u « conserve la norme », c'est-à-dire si : $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

Les expressions « isométrie vectorielle » et « automorphisme orthogonal » sont donc synonymes.
Toute isométrie vectorielle u de E est effectivement un automorphisme !

En effet $u(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \|u(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = \overrightarrow{0}$: u est injective, et E est de dimension finie. □

Les applications Id et $-$Id sont des automorphismes orthogonaux de E.
Plus généralement, si u est un automorphisme orthogonal, il en est de même de $-u$.
Les deux valeurs propres *possibles* d'un automorphisme orthogonal sont 1 et -1.

Si $u(x) = \lambda x$, avec $x \neq 0$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ donc $|\lambda| = 1$. □

NB : l'application $(x, y) \mapsto (-y, x)$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$, mais n'a pas de valeur propre.

Proposition 4.1.1 (caractérisation des isométries vectorielles)
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
a) *l'application u est une isométrie vectorielle (c'est-à-dire : elle conserve la norme).*
b) *l'application u* conserve le produit scalaire *: $\forall\,(x, y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.*
c) *l'application u transforme* toute *base orthonormale de E en une base orthonormale de E.*
d) *l'application u transforme* une *base orthonormale de E en une base orthonormale de E.*

– *a)* $\Rightarrow$ *b)* : on utilise l'identité de polarisation (cf prop. 3.1.6). Pour tout x, y de E, on a :

$$\begin{aligned}
(u(x) \mid u(y)) &= \frac{1}{2}\big(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\big) && \text{(polarisation)}\\
&= \frac{1}{2}\big(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\big) && \text{(linéarité)}\\
&= \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) && \text{(conservation de la norme)}\\
&= (x \mid y) && \text{(polarisation)}
\end{aligned}$$

– *b)* $\Rightarrow$ *c)* : soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de E.
Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille des images $\varepsilon_i = u(e_i)$.
Par conservation du produit scalaire : $(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = (u(e_i) \mid u(e_j)) = (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$ (notation de Kronecker).
Autrement dit, $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E.

– *c)* $\Rightarrow$ *d)* : c'est évident (si c'est vrai pour *toute*, c'est vrai pour *une*).

– *d)* $\Rightarrow$ *a)* : par hypothèse, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, transformée par u en une base orthonormale $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur quelconque de E. Son image par u est : $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$.

Ainsi : $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$ (expression de la norme dans une base orthonormale, cf prop. 3.3.5). □

Définition 4.1.2 (groupe orthogonal d'un espace euclidien)
Soit E un espace euclidien. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.
Alors $O(E)$ est un groupe pour la composition des applications, appelé *groupe orthogonal* de E.

L'application Id est un automorphisme orthogonal de E.
Soit u et v deux automorphismes orthogonaux de E.
Pour tout x de E, on a : $\|(vu)(x)\| = \|v(u(x))\| = \|u(x)\| = \|x\|$, donc vu est dans $O(E)$.
Pour tout x de E, on a : $\|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$, donc u^{-1} est dans $O(E)$.

Proposition 4.1.2 (stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)
Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$.
La restriction de u à F (resp. à $F^\perp$) est donc une isométrie vectorielle de F (resp. de $F^\perp$).

On sait que u est un automorphisme, donc qu'il « conserve la dimension ».
Ainsi : l'inclusion $u(F) \subset F$ et l'égalité $\dim(u(F)) = \dim(F)$ impliquent l'égalité $u(F) = F$.
Soit y dans $F^\perp$. Pour tout x de E, on a $(y \mid x) = 0$ donc $(u(y) \mid u(x)) = 0$.
On en déduit que $u(y)$ est dans $(u(F))^\perp$, c'est-à-dire dans $F^\perp$.
Ainsi $u(F^\perp) \subset F^\perp$, et on sait que cela implique l'égalité $u(F^\perp) = F^\perp$.
La restriction de u à F (resp. à $F^\perp$) est clairement une isométrie vectorielle de F (resp. de $F^\perp$) □

Rappels de terminologie :
a) la phrase « F est stable par u » signifie seulement l'inclusion $u(F) \subset F$;
b) l'égalité $u(F) = F$ se traduit par la phrase « F est (globalement) invariant par u » ;
c) on dira que F est « invariant point par point » si $\forall x \in F,\ u(x) = x$;

On a bien sûr les implications $c) \Rightarrow b) \Rightarrow a)$ mais les réciproques sont fausses en général.

Cas des symétries et des projections orthogonales

Une symétrie vectorielle orthogonale *est* un automorphisme orthogonal.
Une projection orthogonale p *n'est pas* un automorphisme orthogonal, sauf si $p = \text{Id}$.
Plus précisément, si p est la projection orthogonale sur un sous-espace F, alors $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, avec égalité si et seulement si x est dans F (c'est l'*inégalité de Bessel* : voir proposition 3.4.4).

4.2 Matrices orthogonales

Définition 4.2.1 (matrices carrées orthogonales)
Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.
On dit que la matrice M est orthogonale si u est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4.2.1 (matrices de passage entre bases orthonormales)
Soit E un espace euclidien, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
Soit $(\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une famille de n vecteurs, et soit M la matrice de la famille (ε) dans la base $\mathcal{B}$.
Alors la famille (ε) est une base orthonormale de E si et seulement si la matrice M est orthogonale.

On peut donc dire que les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre bases orthonormales.

Ainsi M est la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme u de E défini par : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \varepsilon_i$.
On a les équivalences : M est une matrice orthogonale si et seulement si u est un automorphisme orthogonal (c'est la définition 4.2.1), si et seulement si la famille (ε) (image de la base orthonormale $\mathcal{B}$ par u) est elle-même orthonormale (c'est le point (d) de la proposition 4.1.1). □

Remarque préliminaire :
Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de colonnes $C_1, \ldots, C_n$. Alors le terme général de $A = M^\top M$ est $a_{ij} = C_i^\top C_j$.

On utilise ici le produit scalaire canonique sur l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices-colonne (cf prop.3.1.2).
Pour deux colonnes C et C' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce produit scalaire est défini par : $(C \mid C') = C^\top C'$.
On trouve ici : $[A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M^\top]_{i,k} [M]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{k,i} [M]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [C_i]_k [C_j]_k = (C_i \mid C_j) = C_i^\top C_j$. □

Proposition 4.2.2 (caractérisations de l'orthogonalité d'une matrice)
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
a) la matrice M est orthogonale.
b) les vecteurs colonnes de M forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
c) la matrice M vérifie l'égalité $M^\top M = I_n$.
d) la matrice M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.
e) la matrice M vérifie l'égalité $M\, M^\top = I_n$.
f) les vecteurs lignes de M forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
g) la matrice $M^\top$ est orthogonale.

– *a)* $\Leftrightarrow$ *b)* :
Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, M est la matrice d'une famille de vecteurs $(\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$.
Chaque colonne C_j de M est celle des coordonnées de ε_j dans la base canonique, et on connait l'expression du produit scalaire dans une base orthonormale (voir proposition 3.3.5).
Ainsi : $\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(C_i \mid C_j) = C_i^\top C_j = (\varepsilon_i \mid \varepsilon_j)$.
Dire que M est orthogonale, c'est dire que (ε) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (voir proposition 4.2.1), et cela équivaut donc à dire que ses colonnes C_j forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

– $b) \Leftrightarrow c)$:
On sait que le terme général de $A = M^\top M$ est $a_{i,j} = C_i^\top C_j$ (voir remarque préliminaire).
Donc dire que les C_j sont orthonormées, c'est dire : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = \delta_{ij}$, ou encore $M^\top M = I_n$.

– $c) \Leftrightarrow d) \Leftrightarrow e)$: évident.

– $e) \Leftrightarrow f) \Leftrightarrow g)$:
Les lignes de M sont les colonnes de $M^\top$: il suffit d'appliquer $c) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow a)$ à la matrice $M^\top$. □

Proposition 4.2.3 (le groupe orthogonal $O(n)$)
On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.
C'est un groupe pour le produit des matrices (donc un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$).
On l'appelle le groupe orthogonal d'ordre *n.*

L'ensemble $O(n)$ est une partie non vide de $GL(n,\mathbb{R})$ (il contient la matrice identité I_n).
Si M et N sont dans $O(n)$, alors $(MN)^\top MN = N^\top(M^\top M)N = N^\top N = I_n$, donc MN est dans $O(n)$.
Enfin si la matrice M est dans $O(n)$, la matrice $M^{-1} = M^\top$ est aussi dans $O(n)$.
Conclusion : $O(n)$ est un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$. □

Proposition 4.2.4 (lien entre base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale)
Soit M la matrice d'un endomorphisme u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de l'espace euclidien E.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
– *l'application u est un automorphisme orthogonal de E (c'est-à-dire un élément du groupe $O(E)$).*
– *la matrice M est une matrice orthogonale (c'est-à-dire un élément du groupe $O(n)$).*

On peut interpréter la proposition précédente en disant que les matrices orthogonales sont les matrices des automorphismes orthogonaux dans les bases orthonormales (ce qui généralise en fait la toute première définition : une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme u qui lui est canoniquement associé dans $\mathbb{R}^n$ est une isométrie vectorielle).

Il suffit quasiment de réécrire la démonstration de l'équivalence $a) \Leftrightarrow b)$ de la proposition 4.2.2.
Dans l'espace euclidien E, et dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, la matrice M représente un endomorphisme u.
La colonne C_j est celle des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Ainsi : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (C_i \mid C_j) = C_i^\top C_j = (u(e_i) \mid u(e_j))$ (voir proposition 3.3.5).
Dire que M est orthogonale, c'est dire que la famille des colonnes C_j est orthonormale dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
C'est donc dire que la famille $(u(e_j))_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est orthonormale. Cela équivaut finalement à dire que u est un endomorphisme orthogonal de E (c'est le point (d) de la proposition 4.1.1). □

Exemples

Les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

On verra plus loin que ce sont les seules matrices orthogonales d'ordre 2.

Les matrices $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta) & \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Proposition 4.2.5 (déterminant d'une matrice orthogonale)
Si M est une matrice orthogonale, alors $\det(M)$ est égal à 1 ou à -1.

C'est évident : $M \in O(n) \Rightarrow M^\top M = I_n \Rightarrow \det(M^\top M) = 1 \Rightarrow \det(M)^2 = 1 \Rightarrow \det(M) = \pm 1$. □

Attention la **réciproque** est **fausse**!! Considérer par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques

– Il existe effectivement des matrices orthogonales de déterminant 1 (considérer par exemple I_n) et d'autres qui sont de déterminant -1 (changer par exemple un coefficient diagonal de I_n en -1).

– Si on échange deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice orthogonale, on obtient encore une matrice orthogonale (mais le déterminant change de signe).
C'est la même chose si on remplace une colonne (ou une ligne) par son opposée.

– Si M est orthogonale d'ordre n, il en est de même pour $-M$, mais attention : $\det(-M) = (-1)^n \det(M)$.

Proposition 4.2.6 (le groupe spécial orthogonal $SO(n)$)
On note $SO(n)$, ou $SO_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n de déterminant 1.
L'ensemble $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé groupe spécial orthogonal *d'ordre n.*

L'ensemble $SO(n)$ est une partie non vide du groupe $O(n)$ (il contient la matrice identité I_n).

Si M et N sont dans $SO(n)$: $\begin{cases} \det(MN) = \det(M)\det(N) = 1 \\ \det(M^{-1}) = \det(M^\top) = \det(M) = 1 \end{cases}$ donc MN et M^{-1} sont dans $SO(n)$.

Conclusion : $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$. □

Remarques

– L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1 n'est **pas** un groupe : non seulement il ne contient pas I_n, mais il n'est pas stable : en effet si M et N sont orthogonales de déterminant -1, alors MN est orthogonale de déterminant $+1$.
Si M est orthogonale de déterminant -1, alors M^{-1} est encore orthogonale de déterminant -1.

– La matrice I_n est dans $SO(n)$, alors que $-I_n$ n'est dans $SO(n)$ que si n est pair.

Exercice 4.1 (⇝ **corrigé**)
Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les seules matrices à la fois orthogonales et triangulaires sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux valent 1 ou -1.

Exercice 4.2 (⇝ **corrigé**)
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale d'ordre n. Prouver que : $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$ et $\displaystyle\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Exercice 4.3 (⇝ **corrigé**)
Soit A dans $O_n(\mathbb{R})$ et soit λ une valeur propre *complexe* de A. Montrer que $|\lambda| = 1$.

Exercice 4.4 (⇝ **corrigé**)
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel, défini par : $(A \mid B) = \operatorname{tr}(A^\top B)$.
Pour quelles matrices M l'application $A \mapsto AM$ est-elle alors un automorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4.3 Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

Dans toute cette partie, E_n désigne un espace euclidien de dimension n, avec $n = 2$ ou $n = 3$.
On ne perd aucune généralité à supposer que $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
On énoncera certaines définitions et propriétés en dimension n quelconque, par commodité et parce que la généralisation est facile. Mais on notera que le programme de la classe se limite à $n = 2$ et $n = 3$.

4.3.1 Orientation, bases orthonormales directes

Soit E_n un espace euclidien de dimension n.

Définition 4.3.1 (orientation de l'espace euclidien E_n)
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E_n.
Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On sait que P est orthogonale, donc : $\det(P) \in \{-1, 1\}$.
Si $\det(P) = 1$ (donc si $P \in SO(n)$) on dit que la base $\mathcal{B}$ a la *même orientation* que la base $\mathcal{B}'$.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormales de E_n.
Il y a exactement deux classes d'équivalence. Orienter E_n, c'est choisir l'une de ces deux classes.
– les bases de la classe d'équivalence choisie sont dites *bases orthonormales directes*.
– les bases de l'autre classe d'équivalence sont dites *bases orthonormales indirectes*.

On note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$.
– pour la réflexivité, on sait que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$ donc $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}}) = 1$;
– pour la symétrie, si $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) = 1$, alors $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^\top$ donc $\det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) = 1$;
– pour la transitivité, on suppose que $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) = \det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}) = 1$;
on sait que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ et il en résulte $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}) = \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) \det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}) = 1$;
Ainsi on a bien défini une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormales de E_n.

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormale de E_n, et soit $\mathcal{B}'$ la base orthonormale obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en remplaçant e_1 par $-e_1$ (les autres vecteurs restant inchangés).

La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ se déduit de I_n par le changement de 1 en -1 du premier coefficient diagonal.
Ainsi $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) = -1$, donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont dans deux classes d'équivalence distinctes (disjointes, bien sûr).

Soit $\mathcal{B}''$ une base orthonormale de E. On a $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}) = \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) \det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}) = -\det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''})$.
De deux choses l'une :
– soit $\det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}) = -1$ donc $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}) = 1$ et $\mathcal{B}''$ est dans la classe de $\mathcal{B}$;
– soit $\det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}) = 1$ et et $\mathcal{B}''$ est dans la classe de $\mathcal{B}'$.
On a bien démontré que la relation « a même orientation que » définit exactement deux classes d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormales de E_n. □

En résumé : il y a toujours *deux* orientations possibles sur E_n : le choix de la classe des bases directes est arbitraire. Néanmoins on orientera toujours $\mathbb{R}^n$ en décrétant que sa base canonique est directe.

▷ Effet d'une modification simple des vecteurs de base

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale dans l'espace vectoriel euclidien E_n orienté.

– si on passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ par un échange de deux vecteurs, alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientation contraire ;

– si on passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ en changeant un vecteur en son opposé alors $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont d'orientation contraire ;

> C'est évident car $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ se déduit de I_n par échange de deux colonnes (respectivement par le changement du signe d'un coefficient diagonal) : dans les deux cas, le déterminant est changé en son opposé. □

Par exemple, soit (u, v) une base orthonormale directe de E_2 orienté.

– les bases $(-u, v)$, $(u, -v)$, (v, u) et $(-v, -u)$ sont orthonormales indirectes.

– les bases $(-u, -v)$, $(v, -u)$, et $(-v, u)$ sont orthonormales directes.

De même, soit (u, v, w) une base orthonormale directe de E_3 orienté.

– les bases (v, u, w), (w, v, u), (u, w, v) sont orthonormales indirectes.

– les bases $(u, -v, -w)$, $(-u, v, -w)$, et $(-u, -v, w)$ sont orthonormales directes.

– les bases $(-u, v, w)$, $(u, -v, w)$, $(u, v, -w)$ et $(-u, -v, -w)$ sont orthonormales indirectes.

– les bases (v, w, u), (w, u, v) sont orthonormales directes, etc.

4.3.2 Produit mixte en dimension 2 ou 3

Proposition 4.3.1 (produit mixte)

On se place dans E_n, espace euclidien orienté de dimension n.

Soit $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E_n.

Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ garde la même valeur dans toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$.

Cette valeur est appelée produit mixte *de $u_1, \ldots, u_n$ et elle est notée $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$.*

En dimension 2 ou 3, on notera aussi $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

> Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E, et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
> Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E. Soit M (resp. M') sa matrice dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).
> Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, on a $[u_j]_{\mathcal{B}} = P[u_j]_{\mathcal{B}'}$. On en déduit $M = PM'$.
> Or $\det(P) = 1$, donc $\det(M) = \det(M')$, c'est-à-dire : $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. □

▷ Produit mixte et orientation

L'application « produit mixte » possède les propriétés des applications « déterminant dans une base ».

En particulier le produit mixte $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ est :

– changé en son opposé si on échange deux vecteurs ;

– inchangé si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres ;

– nul si et seulement si les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont liés ;

– non nul si et seulement si les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ forment une base de E_n.

Dans le cas où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ forment une base orthonormale :

– si cette base est directe, alors $[u_1, u_2, \ldots, u_n] = 1$;

– si cette base est indirecte, alors $[u_1, u_2, \ldots, u_n] = -1$.

▷ Majoration de la valeur absolue du produit mixte

– Soit u, v deux vecteurs d'un plan euclidien orienté E_2. Alors $(u \mid v)^2 + [u,v]^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.
On en déduit $\big|[u,v]\big| \leqslant \|u\| \, \|v\|$, avec égalité si et seulement si u et v sont orthogonaux.

> On se place dans une base orthonormale (directe) (e_1, e_2).
> On peut choisir e_1 de telle sorte que u soit lié à e_1, donc $u = ae_1$.
> Posons $v = be_1 + ce_2$. Alors $(u \mid v) = ab$ et $[u,v] = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac$.
> Ainsi : $(u \mid v)^2 + [u,v]^2 = a^2(b^2+c^2) = \|u\|^2 \|v\|^2$. □

– Soit u, v, w trois vecteurs d'un espace euclidien orienté E_3. Alors $\big|[u,v,w]\big| \leqslant \|u\| \, \|v\| \, \|w\|$.
Si ces vecteurs sont libres, il y a égalité si et seulement si la famille u, v, w est orthogonale.

> On se place dans une base orthonormale (directe) (e_1, e_2, e_3).
> On peut choisir e_1 de telle sorte que u soit lié à e_1, donc $u = ae_1$, et de façon que v soit dans le plan engendré par e_1 et e_2 (donc $v = be_1 + ce_2$). Posons $w = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.
> Alors $[u,v,w]^2 = \begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ 0 & c & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}^2 = a^2c^2\gamma^2$. D'autre part, $\|u\|^2 \|v\|^2 \|w\|^2 = a^2(b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.
> On a donc prouvé l'inégalité $(\star)$: $|[u,v,w]| \leqslant \|u\| \, \|v\| \, \|w\|$ dans le cas général.
> On suppose maintenant que u, v, w sont libres (donc $a \neq 0$, $c \neq 0$ et $\gamma \neq 0$).
> Alors $(\star)$ est une égalité $\Leftrightarrow c^2\gamma^2 = (b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ (car $a \neq 0$)
> $\Leftrightarrow c^2(\alpha^2+\beta^2) + b^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = 0 \Leftrightarrow b = \alpha = \beta = 0$
> Ces conditions équivalent à dire que u, v, w sont orthogonaux deux à deux. □

▷ Interprétation du produit mixte dans un plan orienté

Soit u, v deux vecteurs d'un plan euclidien orienté E_2.

Alors $[u,v]$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v.

L'aire orientée du triangle formé sur u et v est $\dfrac{1}{2}[u,v]$.

▷ Interprétation du produit mixte en dimension 3

Soit E_3, euclidien orienté de dimension 3. On identifie les éléments de E_3 avec des points de l'espace.

On se donne un parallélépipède dont les arêtes issues de A sont AB, AC, et AD.

Son volume orienté est $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$. Celui du tétraèdre $ABCD$ est $\dfrac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

On a représenté ci-dessous le parallélépipède.

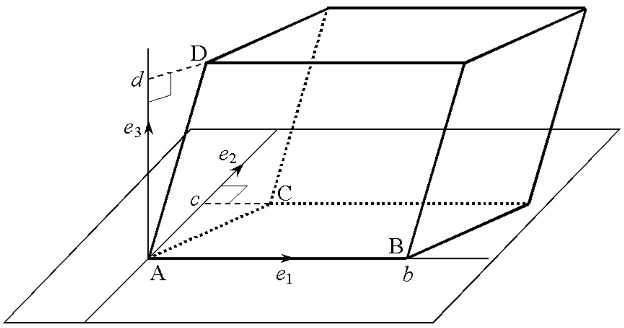
Ici la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ est directe, donc le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$ est positif.

Le procédé de Gram-Schmidt transforme $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ en une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On peut alors écrire $\overrightarrow{AB} = be_1$, $\overrightarrow{AC} = c'e_1 + ce_2$, $\overrightarrow{AD} = d''e_1 + d'e_2 + de_3$.

Alors $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \det_{\mathcal{B}}\big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\big) = bcd$: c'est bien le volume du parallélépipède.

En effet, bc est l'aire du parallélogramme de base, et d est la hauteur du parallélépipède.



4.3.3 Produit vectoriel en dimension 3

Proposition 4.3.2 (produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3)
Soit u, v deux vecteurs d'un espace euclidien orienté E_3 de dimension 3.
Il existe un unique vecteur a de E_3 tel que : $\forall\, w \in E_3,\ [u, v, w] = (a \mid w)$.
Ce vecteur a est appelé produit vectoriel *de u par v, et il est noté $u \wedge v$.*
On a donc l'égalité, pour tous vecteurs u, v, w de E_3 : $[u, v, w] = ((u \wedge v) \mid w)$.

L'application $w \mapsto [u, v, w]$ est une forme linéaire sur l'espace euclidien orienté E_3.
Il existe donc un unique a de E_3 tel que : $\forall\, w \in E_3,\ [u, v, w] = (a \mid w)$ (voir la proposition 3.5.1). □

▷ **Propriétés du produit vectoriel en dimension 3**

– L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est *bilinéaire* : $\begin{cases}(\alpha u + \beta u') \wedge v = \alpha(u \wedge v) + \beta(u' \wedge v)\\ u \wedge (\alpha v + \beta v') = \alpha(u \wedge v) + \beta(u \wedge v')\end{cases}$

Pour tout w de E_3, on a :

$$\begin{aligned}((\alpha u + \beta u') \wedge v \mid w) &= [\alpha u + \beta u', v, w] = \alpha[u, v, w] + \beta[u', v, w] = \alpha\,(u \wedge v \mid w) + \beta\,(u' \wedge v \mid w)\\ &= (\alpha(u \wedge v) + \beta(u' \wedge v) \mid w)\end{aligned}$$

Ce résultat étant vrai pour tout w de E_3, on en déduit l'égalité : $(\alpha u + \beta u') \wedge v = \alpha(u \wedge v) + \beta(u' \wedge v)$.
Bien sûr, c'est la même démonstration pour la « linéarité à droite ». □

– L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est *antisymétrique* ou encore *alternée* : $u \wedge v = -v \wedge u$.

Pour tout w de E_3, on a : $(u \wedge v \mid w) = [u, v, w] = -[v, u, w] = -\,(v \wedge u \mid w) = (-v \wedge u \mid w)$.
Ce résultat étant vrai pour tout w de E_3, on en déduit l'égalité : $u \wedge v = -v \wedge u$. □

– Pour tous vecteurs u, v, w, on peut écrire : $[u, v, w] = ((u \wedge v) \mid w) = (u \mid (v \wedge w))$.

La permutation circulaire $(u, v, w) \to (v, w, u)$ (deux échanges) laisse le produit mixte inchangé.
On en déduit : $((u \wedge v) \mid w) = [u, v, w] = [v, w, u] = ((v \wedge w) \mid u) = (u \mid (v \wedge w))$ □

– Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.

On a $((u \wedge v) \mid u) = [u, v, u] = 0$ et $((u \wedge v) \mid v) = [u, v, v] = 0$ (vecteurs liés donc produit mixte nul). □

– On a : $u \wedge v = \overrightarrow{0} \iff u, v$ sont liés.

- Si u, v sont liés alors : $\forall w \in E_3,\ (u \wedge v \mid w) = [u, v, w] = 0$, donc $u \wedge v = \overrightarrow{0}$.
- Si u, v sont libres, on complète en une base (quelconque) (u, v, w).
  Ainsi $[u, v, w] \neq 0$, c'est-à-dire $(u \wedge v \mid w) \neq 0$, et il en découle $u \wedge v \neq \overrightarrow{0}$. □

– Si u, v sont unitaires et orthogonaux, alors $u \wedge v$ est l'unique vecteur w qui complète u et v en une base orthonormale directe u, v, w de E_3.

Soit $P = \text{Vect}(u, v)$. La droite $D = P^\perp$ porte deux vecteurs unitaires, opposés l'un à l'autre.
Seul l'un d'eux (notons le w) complète u, v en une base orthonormale directe u, v, w de E_3.
On sait qu'il existe λ dans $\mathbb{R}^*$ tel que $u \wedge v = \lambda w$.
On a $\begin{cases} [u, v, u \wedge v] = [u, v, \lambda w] = \lambda [u, v, w] = \lambda \\ [u, v, u \wedge v] = (u \wedge v \mid u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 = \lambda^2 \end{cases}$. Ainsi $\lambda = \lambda^2$, donc $\lambda = 1$, donc $u \wedge v = w$. □

– Si i, j, k est orthonormale directe on a : $\begin{cases} i \wedge j = k & j \wedge k = i & k \wedge i = j \\ j \wedge i = -k & k \wedge j = -i & i \wedge k = -j \end{cases}$

C'est une conséquence directe de la propriété précédente. □

– On suppose que E_3 est muni d'une base orthonormale directe i, j, k.
Soit $u = xi + yj + zk$ et $v = x'i + y'j + z'k$.
Alors le produit vectoriel $u \wedge v$ se calcule en écrivant : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$.

Il suffit de développer $u \wedge v = (xi + yj + zk) \wedge (x'i + y'j + z'k)$ par bilinéarité et antisymétrie, et d'utiliser les valeurs connues de $i \wedge j$, $i \wedge k$, etc.
Cette formule peut être considérée comme une nouvelle définition du produit vectoriel (en se souvenant qu'elle n'est valable que dans une base orthonormale directe, par exemple la base canonique). □

– Soit u, v deux vecteurs de E_3.
On a l'égalité : $(u \mid v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\ \|v\|^2$.
En particulier $\|u \wedge v\| \leqslant \|u\|\ \|v\|$, avec égalité si et seulement si $(u \mid v) = 0$.

On se place dans une base orthonormale (directe) (e_1, e_2, e_3), telle que u soit lié à e_1 (donc $u = ae_1$) et telle que v soit dans le plan engendré par e_1 et e_2 (donc $v = be_1 + ce_2$).
Alors $\begin{cases} (u \mid v) = (ae_1 \mid be_1 + ce_2) = ab \\ u \wedge v = (ae_1) \wedge (be_1 + ce_2) = ac\, e_3 \end{cases}$, donc $(u \mid v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = a^2(b^2 + c^2) = \|u\|^2\ \|v\|^2$. □

– L'aire du parallélogramme $ABDC$ est $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, celle du triangle ABC est $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

– *Distance d'un point à une droite*
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant Ω et dirigée par u. La distance de M à $\mathcal{D}$ est $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega M} \wedge u\right\|}{\|u\|}$.

▷ Déterminer le « signe » d'une matrice orthogonale d'ordre 3

On se donne une matrice carrée orthogonale d'ordre 3. On sait que $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
On cherche ici à identifier la valeur de $\det(M)$, sans calcul explicite de ce déterminant.
Pour cela, on se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son orientation canonique.
La matrice M représente, dans la base canonique, une base orthonormale u, v, w de $\mathbb{R}^3$.

Dire que $\det(M)=1$, c'est dire que u,v,w est directe, ou encore que $u\wedge v=w$.

En comparant une coordonnée non nulle de $u\wedge v$ avec la coordonnée correspondante de w, on peut déterminer si $u\wedge v=w$ (c'est-à-dire si $\det(M)=1$), ou si $u\wedge v=-w$ (c'est-à-dire si $\det(M)=-1$).

Exemple : $M=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\2&-1&-2\end{pmatrix}\in O(3)$, et $u\wedge v=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}3\\6\\-6\end{pmatrix}=w$, donc $\det(M)=1$.

Exercice 4.5 (⇝ **corrigé**)
(formule du double produit vectoriel)
Pour tous vecteurs u,v,w de E_3 (euclidien orienté, montrer que) : $u\wedge(v\wedge w)=(u\mid w)\,v-(u\mid v)\,w$.

Exercice 4.6 (⇝ **corrigé**)
Soit u,v,w trois vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3.
Montrer que $[\,u\wedge v, v\wedge w, w\wedge u\,]=[\,u,v,w\,]^2$.

Exercice 4.7 (⇝ **corrigé**)
(problème de la division vectorielle)
On se place dans un espace euclidien orienté E de dimension 3.
Soit a,b dans E, avec a non nul ; on cherche les vecteurs u de E tels que $a\wedge u=b$.
Si $(a\mid b)\neq 0$, il n'y a pas de solution, sinon on obtient les $u=u_0+\lambda a$, avec $u_0=\dfrac{1}{\|a\|^2}\,b\wedge a$.

Exercice 4.8 (⇝ **corrigé**)
Soit a un vecteur non nul d'un espace euclidien orienté E de dimension 3.
Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(x)=x+a\wedge x$.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
b) Déterminer un polynôme annulateur de f (on pourra d'abord considérer $g\colon x\mapsto a\wedge x$).

4.4 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

4.4.1 Matrices orthogonales d'ordre 2

Proposition 4.4.1 (description des matrices orthogonales d'ordre 2)
Les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant 1 sont les $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant −1 sont les $S(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\\sin(\theta)&-\cos(\theta)\end{pmatrix}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Soit $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $A\in O(2)\iff\begin{cases}a^2+b^2=1\\c^2+d^2=1\\ac+bd=0\end{cases}\iff\begin{cases}\exists\,\theta\in\mathbb{R},\ a=\cos(\theta),\ b=\sin(\theta)\\\exists\,\varphi\in\mathbb{R},\ c=\cos(\varphi),\ d=\sin(\varphi)\\\cos(\varphi-\theta)=0\end{cases}$

L'égalité $\cos(\varphi-\theta)=0$ détermine deux valeurs de φ modulo 2π : ou bien $\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}$, ou bien $\varphi=\theta-\dfrac{\pi}{2}$.

- Si $\varphi = \theta + \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, on trouve les matrices $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \cos(\varphi)\\ \sin(\theta) & \sin(\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} = R(\theta)$.
- Si $\varphi = \theta - \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, on trouve les matrices $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \cos(\varphi)\\ \sin(\theta) & \sin(\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix} = S(\theta)$.

Enfin, il est évident que $\det(R(\theta)) = 1$ et $\det(S(\theta)) = -1$ pour tout réel θ.
On a donc obtenu une description totale du groupe orthogonal $O(2)$. □

▷ Écritures complexes associées

On se place dans un plan euclidien E_2, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
Soit r_θ (resp. s_θ) l'isométrie de matrice $R(\theta)$ (resp. $S(\theta)$) dans $\mathcal{B}$.
À tout vecteur $u = xe_1 + ye_2$, on associe $U = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et l'affixe $z = x + iy$ dans $\mathbb{C}$.
Soit u, u' dans E_2, d'affixes respectives z, z'. Posons $U = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

Alors on a les équivalences : $\begin{cases} u' = r_\theta(u) \ \Leftrightarrow\ U' = R(\theta)U \ \Leftrightarrow\ z' = \mathrm{e}^{i\theta} z\\ u' = s_\theta(u) \ \Leftrightarrow\ U' = S(\theta)U \ \Leftrightarrow\ z' = \mathrm{e}^{i\theta}\,\overline{z}\end{cases}$

$$\begin{aligned} U' = R(\theta)U \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow\ x' + iy' = \big(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y\big) + i\big(\sin(\theta)x + \cos(\theta)y\big)\\ &\Leftrightarrow\ z' = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(x+iy) \ \Leftrightarrow\ z' = \mathrm{e}^{i\theta} z \end{aligned}$$

$$U' = S(\theta)U \ \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ z' = \mathrm{e}^{i\theta}\,\overline{z}$$ □

▷ Propriétés des matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant 1

Les matrices $R(\theta)$ sont appelées *matrices de rotation* (voir plus loin).

Pour tous réels θ et φ, on a : $R(\theta)R(\varphi) = R(\varphi)R(\theta) = R(\theta + \varphi)$.

C'est une conséquence directe de l'écriture complexe et de l'égalité : $\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\varphi} = \mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)}$. □

On retiendra que le groupe $SO(2)$ est commutatif (c'est faux pour $SO(n)$ si $n \geqslant 3$).

On a $R(0) = I_2$ et, pour tout réel θ : $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

Pour tous réels θ et φ, on a : $R(\theta) = R(\varphi) \ \Leftrightarrow\ \theta \equiv \varphi\ [2\pi]$.

C'est évident, mais en particulier : $R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I_2$ donc $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$. □

▷ Propriétés des matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant −1

Pour tous réels θ et φ, on a : $S(\theta)S(\varphi) = R(\theta - \varphi)$.

C'est une conséquence directe de l'écriture complexe.
En effet, si $z' = \mathrm{e}^{i\varphi}\,\overline{z}$ puis $z'' = \mathrm{e}^{i\theta}\,\overline{z'}$, alors $z'' = \mathrm{e}^{i(\theta-\varphi)}\,z$. □

Pour tout réel θ, on a $S(\theta)^{-1} = S(\theta)^{\top} = S(\theta)$, ou encore $S(\theta)^2 = I_2$.

Les matrices $S(\theta)$ sont à la fois orthogonales et symétriques. Elles sont donc « involutives » : $S(\theta)^2 = I_2$.
L'égalité $S(\theta)^2 = I_2$ est aussi une conséquence de : $S(\theta)^2 = R(\theta - \theta) = R(0) = I_2$. □

Pour tous réels θ et φ, on a $R(\theta)S(\varphi) = S(\varphi + \theta)$ et $S(\varphi)R(\theta) = S(\varphi - \theta)$

La composée de $z \mapsto e^{i\varphi}\,\overline{z}$ puis de $z \mapsto e^{i\theta} z$ est $z \mapsto e^{i(\varphi+\theta)}\,\overline{z}$.
La composée de $z \mapsto e^{i\theta} z$ puis de $z \mapsto e^{i\varphi}\,\overline{z}$ est $z \mapsto e^{i(\varphi-\theta)}\,\overline{z}$. □

4.4.2 Angle de rotations et de vecteurs du plan

Proposition 4.4.2 (angle d'une rotation dans le plan euclidien orienté)
Soit E_2 un plan euclidien orienté, et soit r un élément de $SO(E_2)$.
Il existe un réel θ (défini modulo 2π) vérifiant la propriété suivante :
La matrice de r dans toute *base orthonormale directe est égale à* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
On dit que r est la rotation d'angle θ (modulo 2π), et on note $r = r(\theta)$.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E_2.
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}'$ est dans $SO(2)$, donc s'écrit $P = R(\varphi)$ (avec φ défini modulo 2π).
Puisque r est dans $SO(E_2)$, sa matrice A dans $\mathcal{B}$ est dans $SO(2)$, donc s'écrit $A = R(\theta)$.
La matrice de r dans $\mathcal{B}'$ est alors : $B = P^{-1}AP = R(-\varphi)R(\theta)R(\varphi) = R(-\varphi + \theta + \varphi) = R(\theta)$. □

On a en particulier $r(0) = \mathrm{Id}$ et $r(\pi) = -\mathrm{Id}$.
Dans E_2, les expressions « isométries de déterminant 1 » et « rotations » sont synonymes.

▷ Propriétés diverses

– On a $r(\theta) = r(\varphi) \Leftrightarrow \theta \equiv \varphi\ [2\pi]$. La rotation inverse de $r(\theta)$ est $r(-\theta)$.
  On a $r(\theta)r(\varphi) = r(\varphi)r(\theta) = r(\theta + \varphi)$: le groupe $SO(E_2)$ est donc commutatif.

  Ce sont des conséquences immédiates de la proposition 4.4.2 et des propriétés de $SO(2)$. □

– Les seules rotations involutives sont $r(0) = \mathrm{Id}$ et $r(\pi) = -\mathrm{Id}$.

  On a $r(\theta)^2 = \mathrm{Id} \Leftrightarrow r(2\theta) = r(0) \Leftrightarrow 2\theta \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ [\pi]$. □

– La matrice de la rotation $r(\theta)$ dans toute base orthonormale indirecte est $R(-\theta)$.
  Si on inverse l'orientation de E_2, la mesure d'une rotation est donc changée en son opposée.

  Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ une base orthonormale *indirecte*.
  Alors $\mathcal{B} = (e_2, e_1)$ est orthonormale *directe*. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  On sait que la matrice de $r(\theta)$ dans $\mathcal{B}$ est $R(\theta)$.
  La matrice de $r(\theta)$ dans $\mathcal{B}'$ est donc :
  $P^{-1}R(\theta)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(-\theta)$ □

– Si $r = r(\theta)$, avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors le seul vecteur invariant de r est $\overrightarrow{0}$.

En fait, les valeurs propres de la matrice $R(\theta)$ sont $\pm e^{i\theta}$, complexes non réelles :
$\det(XI_2 - R(\theta)) = X^2 - 2\mathrm{tr}(R(\theta))X + \det(r(\theta)) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

– Si $r = r\left(\frac{\pi}{2}\right)$, et si e_1, e_2 forment une base orthonormale directe, alors $r(e_1) = e_2$ et $r(e_2) = -e_1$.

Évident car la matrice de r dans la base (e_1, e_2) est $R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ □

Exercice 4.9 (⇝ **corrigé**)
Soit r la rotation vectorielle d'angle $\theta \mod 2\pi$ du plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, avec $\theta \neq 0\ [\pi]$.
Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice de r dans la base $u, r(u)$.

Exercice 4.10 (⇝ **corrigé**)
On se place $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté.
Soit r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base $\begin{cases} u_1 = (1,1) \\ u_2 = (3,4) \end{cases}$
Montrer que r est une rotation vectorielle.

Exercice 4.11 (⇝ **corrigé**)
Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ une base quelconque d'un plan vectoriel euclidien orienté.
Soit r une rotation vectorielle de E, de matrice A dans la base $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
Pour toute rotation vectorielle ρ, montrer que la matrice de r dans $\rho(\varepsilon_1), \rho(\varepsilon_2)$ est encore A.

Proposition 4.4.3 (complément : mesure de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires)
Soit E_2 un plan vectoriel euclidien orienté, et soit u, v deux vecteurs unitaires de E_2.
Il existe une et une seule rotation $r = r(\theta)$ telle que $r(u) = v$.
*On note $\widehat{(u,v)} = \theta\ [2\pi]$, et on dit que θ est une mesure (modulo 2π) de l'*angle orienté $\widehat{(u,v)}$.

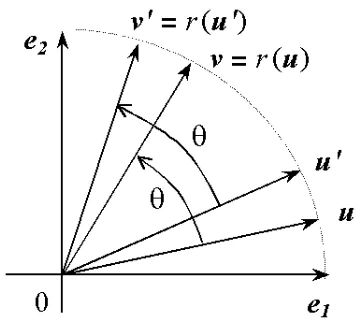
On complète u en une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (u, u')$.
La matrice d'une rotation vectorielle quelconque $r(\theta)$ dans cette base s'écrit $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
On a $r(u) = v \Leftrightarrow v = \cos(\theta)u + \sin(\theta)u'$, ce qui définit θ de façon unique modulo 2π. □

La figure ci-dessous illustre cette propriété. La base e_1, e_2, orthonormale directe, n'est là que pour visualiser l'orientation positive choisie dans le plan. Tous les vecteurs considérés ici sont unitaires.

Il existe bien une *unique* rotation vectorielle $r = r(\theta)$ telle que $v = r(u)$. On commet souvent l'erreur de croire qu'il y a deux rotations transformant u en v (l'une « tournant » dans un sens, la deuxième tournant dans l'autre) ou même une infinité (selon le « nombre de tours effectués »).

La rotation r n'est qu'une application : seul compte où se trouve l'image v d'un vecteur u, et pas la manière dont on « passe » de u à v. L'erreur évoquée vient de la confusion entre la rotation r et les différentes mesures de son angle.

On se rend compte de l'unicité de la rotation r transformant u en v en se donnant un autre vecteur unitaire u'. La condition $v = r(u)$ détermine en effet le vecteur $v' = r(u')$ de manière unique.



Définition 4.4.1 (complément : mesure de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls)
Dans un plan euclidien orienté E_2, soit u et v deux vecteurs non nuls.
On appelle mesure de l'*angle orienté* $\widehat{(u,v)}$ la mesure θ de l'angle orienté $\widehat{\left(\frac{u}{\|u\|},\frac{v}{\|v\|}\right)}$.
On note alors $\widehat{(u,v)} = \theta\ [2\pi]$.

Proposition 4.4.4 (complément : calcul d'une mesure de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls)
Soit u, v deux vecteurs non nuls dans un plan euclidien orienté E_2.
Une mesure θ de l'angle $\widehat{(u,v)}$ est donnée par : $\cos(\theta) = \dfrac{(u \mid v)}{\|u\|\,\|v\|}$, *et* $\sin(\theta) = \dfrac{[u,v]}{\|u\|\,\|v\|}$.

Rappel : $[u,v]$ est le produit mixte de u et v (leur déterminant dans toute base orthonormale directe).

On se place dans l'unique base orthonormale directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E_2 telle que $e_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$.
Par définition, $r(\theta)$ est l'unique rotation vectorielle qui envoie $e_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$ sur $v' = \dfrac{v}{\|v\|}$.
Ainsi : $v' = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ donc $\cos(\theta) = (v' \mid e_1) = \dfrac{(u \mid v)}{\|u\|\,\|v\|}$, et $\sin(\theta) = [e_1, v'] = \dfrac{[u,v]}{\|u\|\,\|v\|}$. □

4.4.3 Classification des isométries d'un plan euclidien orienté

Proposition 4.4.5 (automorphismes orthogonaux de déterminant -1 dans E_2)
On se place dans un plan euclidien orienté E_2, rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
Soit s une isométrie de E_2, de déterminant -1.
Soit $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ *la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$.*
Alors s est la réflexion par rapport à la droite dirigée par le vecteur $u = \cos\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big)e_1 + \sin\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big)e_2$.

On rappelle que « réflexion » est ici synonyme de « symétrie orthogonale ».

On note $v = -\sin\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big)e_1 + \cos\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big)e_2$. La base $\mathcal{B}' = (u, v)$ est orthonormale directe.
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = R\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big)$.
La matrice de s dans la base $\mathcal{B}'$ est : $P^{-1}S(\theta)P = R\Big(-\dfrac{\theta}{2}\Big)S(\theta)R\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big) = S\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big)R\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Ainsi $s(u) = u$ et $s(v) = -v$: l'application s est bien la réflexion par rapport à la droite dirigée par u. □

▷ Classification des isométries d'un plan euclidien orienté E_2

Les isométries de E_2 et de déterminant 1 sont les rotations vectorielles.

Les isométries de E_2 et de déterminant -1 sont les réflexions par rapport à des droites vectorielles.

Le fait que E_2 soit orienté n'intervient pas dans cette classification, mais dans la possibilité de mesurer l'angle d'une rotation et l'angle polaire de l'axe d'une réflexion.

4.5 Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

4.5.1 Orientation d'une droite ou d'un plan en dimension 3

Dans un espace euclidien, on oriente une droite D par le choix d'un des deux vecteurs unitaires de D.

Définition 4.5.1 (orientation d'un plan vectoriel en dimension 3)
Soit E_3 un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit P un plan vectoriel, et soit $D = P^{\perp}$ la droite vectorielle normale à P.

On oriente la droite D par le choix d'un vecteur unitaire w de D.

On en déduit une orientation de P de la manière suivante : une base orthonormale (u, v) de P est dite directe si la base (u, v, w) est une base orthonormale directe de E_3.

Si on inverse l'orientation de D (en choisissant $-w$ plutôt que w), celle de P s'en trouve inversée.

▷ **Retour sur le produit vectoriel**

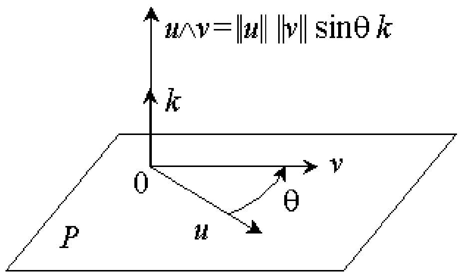
Soient u, v deux vecteurs libres de E_3, et soit P le plan vectoriel qu'ils engendrent.
On oriente le plan P par la donnée d'un vecteur k unitaire et orthogonal à P.

Posons $\widehat{(u, v)} = \theta$ (modulo 2π) avec cette orientation.

Alors on a l'égalité $u \wedge v = \|u\| \, \|v\| \sin(\theta) \, k$.

Si on inverse l'orientation de P en choisissant $-k$ plutôt que k, alors θ est changé en son opposé.

L'égalité $u \wedge v = \|u\| \, \|v\| \sin(\theta) \, k$ est donc toujours valable.



On se place dans la base orthonormale directe (e_1, e_2, k), telle que u soit lié à e_1 (donc $u = \|u\| \, e_1$) et telle que v soit dans le plan engendré par e_1 et e_2, donc $v = \|v\| \, (\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2)$.
Ainsi $u \wedge v = (\|u\| \, e_1) \wedge (\|v\| \, (\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2)) = \|u\| \, \|v\| \sin(\theta)e_1 \wedge e_2 = \|u\| \, \|v\| \sin(\theta)k$. □

4.5.2 Isométries en dimension 3

Proposition 4.5.1 (forme réduite et angle d'un élément de $SO(E_3)$)
Soit r un élément de $SO(E_3)$, distinct de l'application identité.
Alors l'ensemble des vecteurs invariants par r est une droite vectorielle D.
On oriente la droite D (donc $P = D^{\perp}$) par un vecteur unitaire k de D.
Il existe $\theta \neq 0$ tel que r ait, dans toute base orthonormale directe i, j, k, la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
On dit que r est la rotation d'angle θ (modulo 2π) d'axe D orienté par k.

– Le polynôme caractéristique $\chi_r(x) = \det(x\mathrm{Id} - r)$ est unitaire de degré 3 donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_r(x) = +\infty$.
  D'autre part, $\chi_r(0) = -\det(r) = -1 < 0$.
  Il y a donc une valeur propre strictement positive, nécessairement égale à 1.
– Soit k un vecteur invariant unitaire de r, et soit D la droite engendrée par k.

La droite D est invariante par r (elle est même invariante « point par point »).
Il en résulte que le plan $P = D^\perp$ est invariant par r, et que la restriction r' de r à P est un automorphisme orthogonal de P (cf proposition 4.1.2).

On oriente la droite D par le vecteur k, et il en résulte une orientation de P.

Soit i, j une base orthonormale directe de P (donc i, j, k est une base orthonormale directe de E_3).

La matrice de r dans (i, j, k) s'écrit $R = \begin{pmatrix} R' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où R' est orthogonale d'ordre 2.

On a $\det(R) = 1$ donc $\det(R') = 1$.

Ainsi R' est un élément de $SO(2)$. En d'autres termes, r' est un élément de $SO(P)$.

– La rotation r' est distincte de Id_P, sans quoi r serait l'application identité de E_3.
  Ainsi $\mathrm{Inv}(r') = \{\overrightarrow{0}\}$, et les seuls vecteurs invariants de r sont ceux de la droite D.

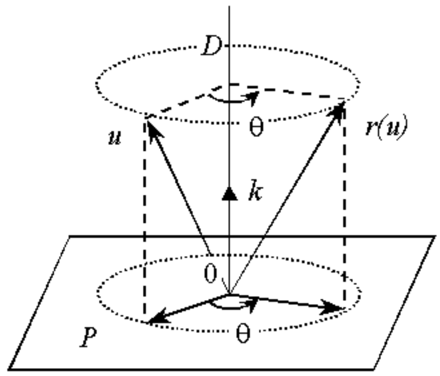
– Notons alors θ (défini modulo 2π), l'angle (non nul) de la rotation r'.
  La matrice de r' dans toute base orthonormale directe (i, j) de P s'écrit $R' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
  La matrice de r est donc $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base orthonormale directe (i, j, k). □

Voici une représentation imagée du résultat précédent.

On dit aussi que r est la rotation d'angle θ (modulo 2π) « autour du vecteur k ».

Avec ces notations, on voit que la restriction de r au plan P (orienté lui-même par la donnée du vecteur unitaire k sur la droite D) est la rotation de P et d'angle θ (modulo 2π).

Si on inverse l'orientation de l'axe D (donc de P), la mesure de l'angle de la rotation r est changée en son opposée.



Remarques

– On peut considérer que Id est une rotation d'axe quelconque, d'angle $\theta = 0$ (modulo 2π).
  La symétrie orthogonale par rapport à la droite D (dite aussi « demi-tour d'axe D ») est la rotation d'axe D d'angle $\theta = \pi$ (modulo 2π).
  Dans ces deux cas, on a $\theta = -\theta$ (modulo 2π) : l'orientation de l'axe D est alors sans importance.

– Soit r une rotation d'angle θ (modulo 2π) autour d'un axe D orienté.
  La quantité $\cos(\theta)$ ne dépend pas de l'orientation de D.
  Si M est la matrice de r dans une base *quelconque*, on a toujours $\mathrm{tr}(M) = 2\cos(\theta) + 1$.
  Par exemple, la matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est dans $SO(3)$.
  Elle représente donc une rotation vectorielle d'angle θ (modulo 2π) (autour de son axe orienté).
  Sans même connaître encore cet axe (on le trouverait en cherchant les vecteurs invariants) ni avoir choisi son orientation, on sait que $2\cos(\theta) + 1 = \mathrm{tr}(M) = -\dfrac{2}{3}$ donc $\cos(\theta) = -\dfrac{5}{6}$.

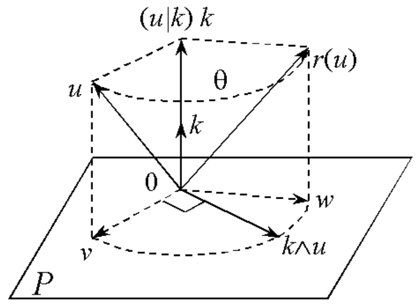
Proposition 4.5.2 (expression d'une rotation vectorielle)
Soit r la rotation vectorielle d'angle θ (modulo 2π) d'axe D orienté par le vecteur unitaire k.

Pour tout vecteur u de E_3, on a : $r(u) = \cos(\theta)\, u + (1 - \cos(\theta))\ (u \mid k)\, k + \sin(\theta)\, k \wedge u$.

Si $(u \mid k) = 0$, *on a :* $r(u) = \cos(\theta)\, u + \sin(\theta)\, k \wedge u$.

On en déduit, si le vecteur u est unitaire et orthogonal à k : $\begin{cases} \cos(\theta) = (u \mid r(u)) \\ \sin(\theta) = [k, u, r(u)] \end{cases}$

Voici comment illustrer la proposition précédente.



Le vecteur v est la projection de u sur $P = (\mathbb{R}k)^{\perp}$.
On a donc $v = u - (u \mid k)\, k$, puis $k \wedge v = k \wedge u$.

Ensuite w est la projection de $r(u)$ sur P, donc $r(u) = (u \mid k)\, k + w$.

Or $w = \cos(\theta)\, v + \sin(\theta)\, k \wedge u$. On en déduit effectivement :
$r(u) = \cos(\theta)\, u + (1 - \cos(\theta))\ (u \mid k)\, k + \sin(\theta)\, k \wedge u$.
Si $(u \mid k) = 0$, on trouve bien sûr : $r(u) = \cos(\theta)\, u + \sin(\theta)\, k \wedge u$.

Si de plus u est unitaire, alors : $(u \mid r(u)) = \cos(\theta)\ \|u\|^2 = \cos(\theta)$.
Avec les mêmes hypothèses sur u, la famille $\mathcal{B} = (u, k \wedge u, k)$ est une base orthonormale directe de E_3.

On a alors : $[k, u, r(u)] = \det_{\mathcal{B}}(k, u, r(u)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sin(\theta)$. □

Exercice 4.12 (⇝ **corrigé**)
On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté.

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Identifier l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Exercice 4.13 (⇝ **corrigé**)
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, soit $k = (a, b, c)$ un vecteur unitaire.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est orthogonale, et identifier l'isométrie vectorielle f canoniquement associée.

Proposition 4.5.3 (forme réduite d'une isométrie de E_3 de déterminant -1)
Soit f un élément de $O(E_3)$, de déterminant -1, distinct de l'application $-\mathrm{Id}$.
Alors l'ensemble $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ *des vecteurs changés en leur opposé par f est une droite vectorielle D.*
On oriente la droite D (donc $P = D^{\perp}$) par un vecteur unitaire k de D.
Il existe $\theta \neq \pi$ tel que f ait, dans toute base orthonormale directe i, j, k, la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Le résultat précédent signifie que f est la composée de la rotation vectorielle d'angle θ autour du vecteur k, et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $P = (\mathbb{R}k)^{\perp}$.

– Le polynôme caractéristique $\chi_f(x) = \det(x\mathrm{Id} - f)$ est unitaire de degré 3 donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \chi_f(x) = -\infty$.
D'autre part, $\chi_f(0) = -\det(f) = 1 > 0$.
Il y a donc une valeur propre strictement négative, nécessairement égale à -1.

– Soit k un vecteur propre unitaire de f pour la valeur propre -1, et D la droite engendrée par k.
Tout comme D, le plan $P = D^\perp$ est stable par f, et $r = f_{|P}$ est un automorphisme orthogonal de P.
Soit i, j une base orthonormale de P (donc i, j, k est une base orthonormale de E_3).
La matrice de f dans (i, j, k) s'écrit $M = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, où R est orthogonale d'ordre 2.
On a $\det(M) = -1$ donc $\det(R) = 1$.
Ainsi R est un élément de $SO(2)$. En d'autres termes, r est un élément de $SO(P)$.

– On a bien sûr $r \neq -\mathrm{Id}_P$, sans quoi f serait l'application $-\mathrm{Id}$ de E_3.
Ainsi $\mathrm{Ker}(r + \mathrm{Id}_P) = \{\overrightarrow{0}\}$, et les seuls vecteurs changés en leur opposé sont ceux de la droite D.
Bien sûr, les vecteurs de D sont invariants par f^2.

– Si $r = \mathrm{Id}_P$ (càd $R = I_2$), alors f est la réflexion par rapport au plan P, et dans ce cas $\mathrm{Inv}(f) = P$.
Dans la suite, on suppose que $r \neq \mathrm{Id}_P$.

– On oriente la droite D par le vecteur k, et il en résulte une orientation de P.
Notons alors θ (défini modulo 2π), l'angle (non nul) de la rotation r.
La matrice de r dans toute base orthonormale directe (i, j) de P s'écrit $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
La matrice de f est donc $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base orthonormale directe (i, j, k). □

Exercice 4.14 ($\leadsto$ **corrigé**)
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, soit $k = (a, b, c)$ un vecteur unitaire.
Déterminer la matrice S, dans la base canonique, de la réflexion s par rapport au plan $(\mathbb{R}k)^\perp$

Exercice 4.15 ($\leadsto$ **corrigé**)
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, soit $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.
Identifier l'endomorphisme u de matrice A dans la base canonique.

Exercice 4.16 ($\leadsto$ **corrigé**)
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, soit $k = (a, b, c)$ un vecteur unitaire.
Soit s la réflexion par rapport au plan $(\mathbb{R}k)^\perp$.
1. Si f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, identifier $g = fsf^{-1}$.
2. Déterminer les isométries de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec toutes les isométries de $\mathbb{R}^3$.

Interprétation matricielle

Soit M une matrice orthogonale d'ordre 3 (c'est-à-dire un élément du groupe $O(3)$).

Alors il existe $\begin{cases} \text{un réel } \theta \text{ (défini modulo } 2\pi) \\ \text{une matrice orthogonale directe } P \\ \text{un réel } \varepsilon \text{ égal à 1 ou à } -1 \end{cases}$ tels que $M = P\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}P^\top$

Ici $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$ selon que, respectivement, $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$.

▷ Classification des isométries d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Soit E_3 un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On peut classer les isométries f de E_3 suivant la dimension du sous-espace $\text{Inv}(f) = \text{Ker}(f - \text{Id})$.

- Si $\text{Inv}(f) = E_3$, alors $f = \text{Id}$, et c'est une isométrie de déterminant 1.
- Si $\text{Inv}(f)$ est un plan P, alors f est la symétrie orthogonale (réflexion) par rapport à ce plan, et c'est une isométrie de déterminant -1.
- Si $\text{Inv}(f)$ est une droite D, alors (et en décidant d'une orientation de cette droite D) f est une rotation d'axe D et d'angle $\theta \neq 0$ (modulo 2π). C'est alors une isométrie de déterminant 1.

  Cas particulier : si $\theta = \pi$ (modulo 2π), alors f est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à D (on dit aussi : le demi-tour d'axe D).
- Si $\text{Inv}(f)$ est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, alors $\text{Inv}(f^2)$ est une droite vectorielle D.

  Dans ce cas f est une isométrie de déterminant -1.

  Si on convient d'une orientation de D, l'application f est la composée $f = rs = sr$ d'une rotation d'axe D et d'angle $\theta \neq 0$ (modulo 2π) et de la symétrie vectorielle orthogonale (on dit aussi la réflexion) par rapport au plan $P = D^\perp$.

Exercice 4.17 (⇝ **corrigé**)

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, trouver les endomorphismes f tels que : $\forall\, u, v \in E,\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

4.6 Endomorphismes symétriques

4.6.1 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Définition 4.6.1 (endomorphisme symétrique d'un espace euclidien)
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.
On dit que u est *symétrique* si, pour tous x, y de E, on a l'égalité : $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$.

Proposition 4.6.1 (caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques)
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.
Alors u est symétrique si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

- Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de E, et soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.
  Pour tous indices i, j, le coefficient $a_{i,j}$ est la coordonnée de $u(e_j)$ sur e_i dans la base orthonormale $\mathcal{B}$.
  On a donc $a_{i,j} = (e_i \mid u(e_j)) = (u(e_j) \mid e_i)$ pour tous i, j.
- On suppose que $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$ pour tous x, y de E.
  En particulier : $\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (u(e_i) \mid e_j) = (e_i \mid u(e_j))$, c'est-à-dire $a_{j,i} = a_{i,j}$. Ainsi A est symétrique.
- Réciproquement, on suppose que la matrice A dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique.
  Soit x, y deux vecteurs quelconques de E, et X, Y les matrices-colonne de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.
  On connaît l'expression matricielle du produit scalaire dans une base orthonormale (cf proposition 3.3.5).
  Ainsi pour tous x, y de E, on a : $(u(x) \mid y) = (AX)^\top\, Y = X^\top A^\top\, Y = X^\top (AY) = (x \mid u(y))$. □

Proposition 4.6.2 (espace vectoriel des endomorphismes symétriques)
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
On peut noter $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E (notation non officielle).
Alors $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On munit E d'une base orthonormale $\mathcal{B}$.
On sait que l'application $\varphi\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à u associe sa matrice M dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme.
D'après la proposition 4.6.1, l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est l'image réciproque de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par cet isomorphisme.
Donc $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et $\dim(\mathcal{S}(E)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Proposition 4.6.3 (orthogonalité du noyau et de l'image d'un endomorphisme symétrique)
Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.
Alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\ (u)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Soit x dans $\mathrm{Ker}(u)$ et $y = u(z)$ dans $\mathrm{Im}\ (u)$. Alors $(x \mid y) = (x \mid u(z)) = (u(x) \mid z) = (\overrightarrow{0} \mid z) = 0$.
Ainsi $\mathrm{Im}\ (u)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(u)^\perp$, donc $\mathrm{Im}\ (u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$ (car leurs dimensions sont égales). □

Proposition 4.6.4 (orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme symétrique)
Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, stable par u, alors $F^\perp$ est également stable par u.
Les restrictions de u à chacun de ces deux sous-espaces sont encore symétriques.

On suppose que F est stable par l'endomorphisme symétrique u. Soit y un élément de $F^\perp$.

Pour tout x de F, on sait que $u(x)$ est dans F. Il en résulte : $(u(y) \mid x) = (y \mid u(x)) = 0$. Ainsi $F^\perp$ est stable par u. Les restrictions de u à F et $F^\perp$ sont encore symétriques (se placer dans une base orthonormale adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^\perp$ et revenir à la définition 4.6.1). □

Proposition 4.6.5 (projections et symétries vectorielles orthogonales)

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Soit p une projection vectorielle de E ($p^2 = p$) et s une symétrie vectorielle de E ($s^2 = \mathrm{Id}$).

Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

De même s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.

Soit E un espace vectoriel euclidien, décomposé en la somme directe $E = F \oplus G$.

Soit p la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G.

Soit $s = 2p - \mathrm{Id}$ la symétrie vectorielle de E par rapport à F, parallèlement à G.

Remarquons que s est symétrique si et seulement p est symétrique (car Id est symétrique !).

- Si p est symétrique, alors $F = \mathrm{Im}\,(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux.
- Réciproquement, on suppose que $F = G^\perp$.

  Soit $\begin{cases} x = x' + x'' \\ y = y' + y'' \end{cases}$ la décomposition de deux vecteurs x et y sur la somme directe $E = \mathrm{Im}\,(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(p)$.

  On a $p(x) = x'$ et $p(y) = y'$ donc $(p(x) \mid y) = (x' \mid y') = (x \mid p(y))$, donc p est symétrique.

  Autre argument : si A est la matrice de p dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Im}\,(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(p)$, alors A est diagonale (c'est une matrice J_r, voir la proposition 1.2.16) donc est symétrique.

  Il en résulte que la matrice A (donc l'endomorphisme p) sont symétriques (cf prop. 4.6.1). □

Exercice 4.18 (⇝ **corrigé**)

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Montrer que p est un projecteur orthogonal.

b) Donner une base orthonormale de $\mathrm{Im}\,(p)$ et une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(p)$.

4.6.2 Le théorème spectral

Proposition 4.6.6 (théorème spectral)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et soit u un endomorphisme symétrique de E.

Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé dans $\mathbb{R}$ (donc u possède n valeurs propres réelles, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité).

Les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux, et leur somme est E.

Il existe des bases orthonormées de E formées de vecteurs propres de u.

Conformément au programme, on retiendra donc :

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

– On commence par montrer que le polynôme caractéristique χ_u est scindé.
Soit S la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$. On sait que S est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
On considère S comme un élément particulier de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit λ une valeur propre (complexe) de S, et X un vecteur propre associé (élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$).
On a $SX = \lambda X$. Par conjugaison, on trouve : $\overline{S}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, donc $S\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$ car S est réelle.
Par transposition, on trouve : $\overline{X}^\top S = \overline{\lambda}\,\overline{X}^\top$ car S est symétrique.
Après produit à droite par X, on obtient : $\overline{X}^\top SX = \overline{\lambda}\,\overline{X}^\top X$, donc $\lambda\,\overline{X}^\top X = \overline{\lambda}\,\overline{X}^\top X$.
Mais $\overline{X}^\top X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$. Par simplification, on trouve $\lambda = \overline{\lambda}$.
Ainsi, toutes les valeurs propres complexes de la matrice S sont en fait des nombres réels.
Le polynôme caractéristique de S est donc scindé dans $\mathbb{R}$.
Comme $\chi_u = \chi_S$, il est de même du polynôme caractéristique de l'endomorphisme u : celui-ci possède donc n valeurs propres réelles, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité.

– On montre, par récurrence sur $\dim(E) = n$, que l'endomorphisme possède une base orthonormale de vecteurs propres. Il n'y a rien à prouver si $n = 1$, l'un des deux vecteurs unitaires de E étant une base orthonormale de vecteurs propres à lui tout seul.
On se donne un entier $n \geqslant 2$ et on suppose que la propriété a été démontrée au rang $n - 1$.
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et soit u un endomorphisme symétrique de E.
On sait que χ_u est scindé dans $\mathbb{R}$. Soit λ une valeur propre, et e_1 un vecteur propre unitaire associé.
La droite $D = \mathbb{R}e_1$ est stable par u. Il est donc de même de l'hyperplan $H = D^\perp$.
On sait aussi que la restriction v de u à H est un endomorphisme symétrique de H (cf prop.4.6.4).
Par hypothèse il existe dans H une b.o.n. $(e_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs propres pour v (donc pour u).
La famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est donc une base orthonormale de E, formée de vecteurs propres de u.
Cela prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

– On a donc prouvé que tout endomorphisme symétrique u de E est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs propres.
Chacun des sous-espaces propres de u étant engendré par une sous-famille de $\mathcal{B}$, les différents sous-espaces propres E_λ de u sont orthogonaux deux à deux.

– On peut retrouver l'orthogonalité des E_λ par un raisonnement direct.
En effet, soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de u. Soit x dans E_λ et y dans E_μ.
L'égalité $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$ devient $\lambda\,(x \mid y) = \mu\,(x \mid y)$ et elle implique $(x \mid y) = 0$. □

Le théorème spectral possède une interprétation matricielle immédiate :

Proposition 4.6.7 (interprétation matricielle du théorème spectral)
Soit A une matrice symétrique à coefficients réels*, d'ordre n.*
- *la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (ses valeurs propres sont donc réelles).*
- *les sous-espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
- *il existe des matrices orthogonales P telles que $P^{-1}A\,P = P^\top A\,P$ soit diagonale.*

En d'autres termes : *pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale P telles que $A = P\,D\,P^{-1} = P\,D\,P^\top$.*

Remarque : bien se souvenir que les matrices symétriques dont on parle ici sont à coefficients réels.

À titre d'exercice, on vérifiera que $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ (symétrique complexe) n'est *pas* diagonalisable.

Exercice 4.19 (⇝ **corrigé**)
Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale. Calculer A^n pour n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 4.20 (⇝ **corrigé**)
Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-i & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2-i & 18 & 2 \\ -3 & 18 & 1-i & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 4.21 (⇝ **corrigé**)
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. On suppose : $\exists\, m \in \mathbb{N}^*,\ A^m = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 4.22 (⇝ **corrigé**)
Soit $A = (a_{ij})$, symétrique réelle d'ordre n, de valeurs propres $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. Montrer que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 4.23 (⇝ **corrigé**)
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. Pour tous X, Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(X,Y) = X^\top AY$.

a) Exprimer $\varphi(X,Y)$ en fonction des composantes de X et de Y dans une base orthonormée de vecteurs propres de A, et en fonction des valeurs propres de A.
b) Montrer que l'application $(X,Y) \mapsto \varphi(X,Y)$ définit un produit scalaire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 4.24 (⇝ **corrigé**)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

a) Il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^\top M$.
b) La matrice A est symétrique et ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Exercice 4.25 (⇝ **corrigé**)
On considère la matrice A carrée d'ordre n, dont le terme général est $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Indication : pour tout vecteur propre X, considérer $X^\top A\, X$.