Chapitre 5

Espaces vectoriels normés de dim. finie

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

5.1 Norme, distance, parties bornées

5.1.1 Norme, espace vectoriel normé

Définition 5.1.1 (norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On dit que $N : E \to \mathbb{R}$ est une *norme* sur E si :
Pour tous vecteurs x et y, et pour tout scalaire λ : $\begin{cases} N(x) \geqslant 0, \quad \text{avec} \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \ \textit{(inégalité triangulaire)} \end{cases}$
On note en général $\|x\|$ plutôt que $N(x)$.
L'espace E, muni de la norme $x \mapsto \|x\|$, est appelé un *espace vectoriel normé*.

▷ **Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$**

En notant $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un vecteur quelconque $\mathbb{K}^p$, on définit trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$:
- la « norme indice 1 » : $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_p|$
- la « norme indice 2 », ou « norme euclidienne » : $\|x\|_2 = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2\Big)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_p|^2}$
- la « norme infini » : $\|x\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$

La seule vérification non triviale concerne l'inégalité triangulaire pour la « norme indice 2 ».
On regarde cette inégalité triangulaire dans les trois cas précités :
- pour la « norme indice 1 » : $\|x+y\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$.
- pour la « norme indice 2 » :
  d'abord : $\|x+y\|_2^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^{p} (|x_i|^2 + 2\mathrm{Re}(x_i\overline{y_i}) + |y_i|^2)) = \|x\|_2^2 + 2\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Re}(x_i\overline{y_i}) + \|y\|_2^2$
  et : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Re}(x_i\overline{y_i}) \leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_i|\,|y_i| \underset{\star}{\leqslant} \Big(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{p} |y_i|^2\Big)^{1/2} = \|x\|_2 \|y\|_2$ ($\star$ = Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$).
  on a donc obtenu : $\|x+y\|_2^2 \leqslant \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$, c'est-à-dire : $\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2$.
- pour la « norme infini » :
  $\|x+y\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i + y_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p} (|x_i| + |y_i|) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i| + \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ □

Remarques diverses

- Ces définitions s'étendent à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie).
  La norme « déduite du produit scalaire » est définie par : $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ (cf 3.1.3)
- Dans un espace vectoriel normé E, on la double inégalité : $\Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

  On écrit $\|x\| = \|y + (x-y)\| \leqslant \|y\| + \|x-y\|$ donc $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$.
  Par symétrie, on trouve $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|$, et il en découle $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x-y\|$.
  Ainsi $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (et on ne change rien en remplaçant y par $-y$). □

– Soit E un espace vectoriel normé non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$.
Il existe des vecteurs *unitaires*, c'est-à-dire dont la norme vaut 1.
Plus généralement, il existe des vecteurs de norme $r > 0$ fixée (considérer $r\dfrac{x}{\|x\|}$, où $x \neq \overrightarrow{0}$).

▷ Remarque sur le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit $x \mapsto \|x\|$ la norme associée au produit scalaire de E.

On sait que l'inégalité $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ est une égalité si et seulement si x et y sont positivement liés (voir à ce sujet la proposition 3.1.7).

Pour une norme quelconque, et si $y = \lambda x$, avec $\lambda \geqslant 0$: $\|x+y\| = (1+\lambda)\|x\| = \|x\| + \|y\|$.

Mais la réciproque est fausse, en général. Prenons deux exemples :

– si $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$: $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ et $\|x+y\|_1 = 2 = \|x\|_1 + \|y\|_1$.
– si $x = (1,0)$ et $y = (1,1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$: $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x+y\|_\infty = 2 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Exercice 5.1 (⇝ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé. Soit x, y, z, t quatre vecteurs de E.
Montrer que $\|x-t\| + \|y-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-t\| + \|t-z\| + \|z-x\|$.

Exercice 5.2 (⇝ **corrigé**)
Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour $u = (x,y)$ par $N(u) = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x+ty|$ est une norme.
Représenter la boule unité fermée de centre 0.

▷ Normes usuelles sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Il y a de nombreuses normes « usuelles » sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, à commencer par celles qui consistent à identifier un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec un élément de $\mathbb{K}^{np}$ et à utiliser l'une des trois normes « usuelles » sur $\mathbb{K}^{np}$.

On obtient donc les trois normes suivantes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

– la « norme indice 1 » : $\|A\|_1 = \sum\limits_{i,j} |a_{i,j}|$; la « norme infini » : $\|A\|_\infty = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|$.
– la norme « de Frobenius », ou norme « de Schur », définie par : $\|A\|_f = \Big(\sum\limits_{i,j} \big|a_{i,j}^2\big|\Big)^{1/2}$.
On vérifie que $\|A\|_f = \Big(\mathrm{tr}(A^\top \overline{A})\Big)^{1/2}$ (voir exercice 5.3).
– L'exercice 5.6 étudie deux autres normes sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 5.3 (⇝ **corrigé**)
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme « de Frobenius », ou « de Schur », définie par : $\|A\|_f = \Big(\mathrm{tr}(A^\top A)\Big)^{1/2}$.
Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\|AB\|_f \leqslant \|A\|_f \|B\|_f$.
Montrer que ce résultat ne peut pas être amélioré de façon générale.

Exercice 5.4 (⇝ **corrigé**)
On munit l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme définie par : $\|A\|_\infty = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|$.
Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\|_\infty \leqslant n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$, et que ce résultat n'est pas améliorable.

Exercice 5.5 (⇝ **corrigé**)

On munit l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme définie par : $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|AB\|_1 \leqslant \|A\|_1 \|B\|_1$, et que ce résultat n'est pas améliorable.

Exercice 5.6 (⇝ **corrigé**)

(deux normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose : $N_1(A) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$, $N_\infty(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$

a) Montrer que N_1 est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (dite « norme de colonne »).

b) Montrer que, pour tout A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a $N_1(AB) \leqslant N_1(A)N_1(B)$.

c) Montrer que N_∞ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (dite « norme de ligne »).

d) Montrer que, pour tout A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a $N_\infty(AB) \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)$.

5.1.2 Distance associée, boules et sphères

Définition 5.1.2 (distance associée à une norme)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour tous vecteur x, y de E on pose $d(x, y) = \|y - x\|$.

Cette application est une *distance* sur E car elle vérifie les propriétés suivantes :

– pour tous x, y de E : $d(x, y) \geqslant 0$ avec $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

– pour tous x, y de E : $d(x, y) = d(y, x)$

– pour tous x, y, z de E : $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)

On l'appelle distance *induite* par (ou *associée* à) la norme $x \mapsto \|x\|$ sur E.

On vérifie seulement l'inégalité triangulaire (le reste est évident) :
$d(x, y) = \|y - x\| = \|(z - x) + (y - z)\| \leqslant \|z - x\| + \|y - z\| = d(x, z) + d(z, y)$. □

Propriétés

– Pour tous vecteurs x, y, z de E, on a l'inégalité : $|d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z)$.

On sait que $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, ce qui s'écrit $d(x, y) - d(x, z) \leqslant d(y, z)$.
On en déduit $d(x, z) - d(x, y) \leqslant d(y, z)$ par symétrie, puis finalement $|d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z)$. □

– La distance d est *invariante par translation* : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) = d(x + z, y + z)$.

C'est évident : $d(x + z, y + z) = \|(y + z) - (x + z)\| = \|y - x\| = d(x, y)$. □

Exercice 5.7 (⇝ **corrigé**)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit a, b distincts dans $\mathbb{R}^n$, et soit $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

On suppose que $d(x, a) = d(x, b)$. Montrer que $d(x, c) < d(x, a)$.

Définition 5.1.3 (complément : distance d'un point à une partie de E)
Soit a un élément de l'espace vectoriel normé E, et soit X une partie non vide de E.
On appelle distance de a à X la quantité $d(a, X) = \inf\{d(a, x),\ x \in X\}$.

Dans le cas général, rien n'indique que la distance de a à X soit « atteinte », c'est-à-dire qu'il existe un x_0 de X tel que $d(a, x_0) = \inf\{d(a, x),\ x \in X\}$. Et même si x_0 existe, rien n'indique qu'il soit le seul à posséder cette propriété (à ce sujet, on pourra se reporter à l'exercice 5.25).

Par exemple :
- Dans $(\mathbb{R}, |\,|)$, soit $a = 0$ et $X =]1, +\infty[$. Alors $d(a, X) = 1$ mais cette distance n'est pas atteinte.
  Avec $a = 0$ et $X =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, on a $d(a, X) = 1$, distance atteinte en $x_0 = -1$ et en $x_1 = 1$.
- Dans $(\mathbb{C}, |\,|)$, soit $a = 0$ et $X = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant 1\}$.
  On a $d(a, X) = 1$ et cette distance est atteinte en tous les points du cercle unité. □

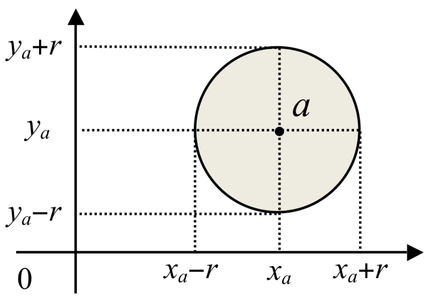
En revanche, on sait que si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien E (muni de la norme associée au produit scalaire), la distance $d(x, F)$ d'un vecteur x de E au sous-espace F est atteinte en un point unique : le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F (cf prop. 3.4.5).

Définition 5.1.4 (boules et sphères dans un espace vectoriel normé)
Soit E un espace vectoriel normé. Soit a un vecteur de E et r un réel positif ou nul.
- l'ensemble $B(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) < r\}$ est appelé *boule ouverte* de centre a et de rayon r.
- l'ensemble $\overline{B}(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) \leqslant r\}$ est appelé *boule fermée* de centre a et de rayon r.
- l'ensemble $S(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) = r\}$ est appelé *sphère* de centre a et de rayon r.

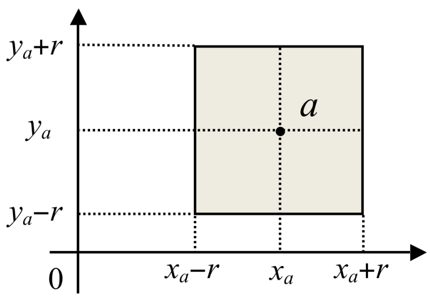
Cas particulier : si $a = \overrightarrow{0}$ et $r = 1$, on parle de *boule unité* et de *sphère unité*.

Sur un espace vectoriel normé E, les boules ouvertes et fermées dépendent bien sûr de la norme utilisée.

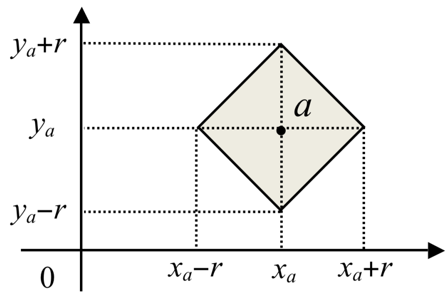
Dans $\mathbb{R}^2$, voici une illustration de $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$ pour les normes $u \mapsto \|u\|_2$ puis $u \mapsto \|u\|_\infty$ et enfin $u \mapsto \|u\|_1$.



Pour la norme $x \mapsto \|x\|_2$



Pour la norme $x \mapsto \|x\|_\infty$



Pour la norme $x \mapsto \|x\|_1$

Remarque : si $r = 0$, on a $B(a, r) = \emptyset$ et $\overline{B}(a, r) = S(a, r) = \{a\}$. Dans la suite, on considérera essentiellement des boules ouvertes, des boules fermées, et des sphères de rayon strictement positif.

Exercice 5.8 (⇝ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé.
Soit a, b dans E et r, s dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $B(a, r) + B(b, s) = B(a + b, r + s)$.

Exercice 5.9 (⇝ **corrigé**)
Soit $x \mapsto N(x)$ et $x \mapsto N'(x)$ deux normes sur un espace vectoriel E.
On suppose que $B(\overrightarrow{0}, 1) \subset B'(\overrightarrow{0}, 1)$. Montrer que : $\forall x \in E,\ N'(x) \leqslant N(x)$.

Exercice 5.10 (⇝ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
On suppose que E contient une boule ouverte de rayon strictement positif. Montrer que $F = E$.

5.1.3 Parties convexes d'un espace vectoriel normé

Définition 5.1.5 (segment dans un espace vectoriel normé)
Soit E un espace vectoriel normé, et soit x, y deux éléments de E.
On appelle *segment* d'extrémités x et y l'ensemble $[x, y] = \{z = (1-\lambda)x + \lambda y,\ \lambda \in [0, 1]\}$.

Définition 5.1.6 (partie convexe d'un espace vectoriel normé)
Soit $\mathcal{C}$ une partie d'un espace vectoriel normé E.
On dit que $\mathcal{C}$ est *convexe* si : $\forall (x, y) \in \mathcal{C}^2,\ [x, y] \subset \mathcal{C}$.

Exemples et propriétés

– L'ensemble vide est convexe. Tout sous-espace vectoriel de E est convexe.

– L'image d'un convexe, par une homothétie $x \mapsto \alpha x$ ou par une translation $x \mapsto x + a$, est convexe.

> Soit X une partie convexe de E. Soit α dans $\mathbb{K}$ et a dans E.
> – Soit $Y = \{y = \alpha x,\ x \in E\}$. Soit $y_1 = \alpha x_1$ et $y_2 = \alpha x_2$ dans Y (avec x_1, x_2 dans X).
> Pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, le vecteur $y_3 = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 = \alpha(\underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\in X})$ est dans Y, donc Y est convexe.
> – Soit $Z = \{y = a + x,\ x \in E\}$. Soit $z_1 = a + x_1$ et $z_2 = a + x_2$ dans Z (donc x_1, x_2 sont dans X).
> Pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$: $z_3 = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 = a + \underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\in X}$ est dans Z, donc Z est convexe. □

– Soit f une forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, et soit α un réel. Les ensembles définis par $f(x) = \alpha$, ou $f(x) \geqslant \alpha$, ou $f(x) \leqslant \alpha$, ou $f(x) > \alpha$, ou $f(x) < \alpha$ sont convexes.

> Soit λ un élément quelconque du segment $[0, 1]$:
> Si $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \alpha$, alors $f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) = (1-\lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha$.
> C'est la même chose en remplaçant $=$ par $\geqslant$, $\leqslant$, $>$ ou $<$.
> (pour la conservation des inégalités strictes, on note que $\lambda > 0$ ou $1 - \lambda > 0$). □

Exercice 5.11
$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ deux matrices stochastiques, soit λ dans $[0,1]$, et soit $C=\lambda A+(1-\lambda)B=(c_{i,j})$.

Pour tous i,j de $[\![1,n]\!]$, on a : $\begin{cases}0\leqslant a_{i,j}\leqslant 1\\0\leqslant b_{i,j}\leqslant 1\end{cases}$ donc : $0\leqslant c_{i,j}=\lambda a_{i,j}+(1-\lambda)b_{i,j}\leqslant 1$.

Enfin, pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}c_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{i,j}+(1-\lambda)b_{i,j})=\lambda\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}+(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}=\lambda+(1-\lambda)=1$.

Conclusion : l'ensemble des matrices stochastiques est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

▷ Complément : enveloppe convexe

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier ou à comprendre (mais elles ne sont pas au programme) :

- Toute intersection de convexes est convexe. Toute partie X de E est donc incluse dans un plus petit convexe $\widehat{X}$ (intersection de tous les convexes contenant X), qui est nommé *enveloppe convexe* de X.
- Par exemple, l'enveloppe convexe de la paire $\{x,y\}$ est le segment $[x,y]$.
  L'enveloppe convexe de $\{x,y,z\}$ est $\{(1-\lambda-\mu)x+\lambda y+\mu z,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\ 0\leqslant\mu\leqslant 1\}$.
  Plus généralement, si $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_p\}$, alors $\widehat{X}=\Big\{\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant p}\lambda_i x_i,\ 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ \sum_{1\leqslant i\leqslant p}\lambda_i=1\Big\}$.

Proposition 5.1.1 (convexité des boules dans un espace vectoriel normé)
Dans un espace vectoriel normé, les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes.

Soit a dans E et r dans $\mathbb{R}^+$. Soit x,y dans $B(a,r)$ et $z=(1-\lambda)x+\lambda y$, avec $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.
On a $\|z-a\|=\|((1-\lambda)x+\lambda y)-a\|=\|(1-\lambda)(x-a)+\lambda(y-a)\|\leqslant(1-\lambda)\,\|x-a\|+\lambda\,\|y-a\|$.
Mais $\|x-a\|<r$, $\|y-a\|<r$, et l'un au moins des deux réels $1-\lambda$ ou λ est strictement positif.
On en déduit $\|z-a\|<(1-\lambda)r+\lambda r$, c'est-à-dire $\|z-a\|<r$. Ainsi z est dans $B(a,r)$.
La démonstration est la même (et un tantinet plus simple) dans le cas de la boule fermée $\overline{B}(a,r)$. □

5.1.4 Parties bornées d'un espace vectoriel normé

Définition 5.1.7 (partie bornée d'un espace vectoriel normé)
Soit E un espace vectoriel normé.
Une partie X de E est dite *bornée* s'il existe r dans $\mathbb{R}^+$ tel que $X\subset\overline{B}(0,r)$.

Autrement dit : X est bornée s'il existe $r\geqslant 0$ tel que : $\forall x\in X,\ \|x\|\leqslant r$.

▷ Complément : diamètre d'une partie bornée non vide

Soit X une partie bornée et non vide de E.
La quantité $\Delta(X)=\sup\{d(x,y),\ x\in X,\ y\in X\}$ est finie. On l'appelle le *diamètre* de X.

Exercice 5.12 (⇝ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer que toute boule (ouverte ou fermée) de rayon $r>0$ est une partie bornée de diamètre $2r$.

Définition 5.1.8 (fonction ou suite bornée, à valeurs dans un espace vectoriel normé)
Soit E un espace vectoriel normé, et soit X un ensemble quelconque.
Une fonction f de X dans E est dite bornée si son ensemble image $f(X)$ est une partie bornée de E.
En particulier, une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de E est dite bornée si $\{x_n,\ n \geqslant 0\}$ est une partie bornée de E.

5.2 Suites d'un espace vectoriel normé

5.2.1 Suites convergentes

Définition 5.2.1 (suite convergente d'un espace vectoriel normé)
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'un espace vectoriel normé E.
Cette suite est dite *convergente* s'il existe ℓ de E tel que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$.
Dans le cas contraire, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *divergente*.

Remarques

– L'inégalité $\|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$ s'écrit aussi $x_n \in \overline{B}(\ell, \varepsilon)$, ou encore $d(x_n, \ell) \leqslant \varepsilon$.
– Dans la définition précédente, on peut remplacer $\|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$ par $\|x_n - \ell\| < \varepsilon$.
– Dans la définition, on peut même remplacer $\|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$ par $\|x_n - \ell\| \leqslant K\varepsilon$, où $K > 0$ (cela se produit fréquemment dans les démonstrations où il s'agit de prouver la convergence d'une suite).

Proposition 5.2.1 (unicité de la limite en cas de convergence)
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'un espace vectoriel normé E.
Si cette suite est convergente, l'élément ℓ de la définition 5.2.1 est unique.
On l'appelle limite *de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et on note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

On suppose qu'il existe ℓ et ℓ' répondant à la définition 5.2.1. On se donne ε quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Par hypothèse, il existe (n_0, n_1) dans $\mathbb{N}^2$ tels que : $\begin{cases} \forall\, n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon \\ \forall\, n \geqslant n_1,\ \|x_n - \ell'\| \leqslant \varepsilon \end{cases}$.
Ainsi : $\forall\, n \geqslant \max(n_0, n_1),\ \|\ell - \ell'\| \leqslant \|\ell - x_n\| + \|x_n - \ell'\| \leqslant 2\varepsilon$.
Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, et il en résulte $\|\ell - \ell'\| = 0$, c'est-à-dire $\ell = \ell'$. □

Proposition 5.2.2 (toute suite convergente est bornée)
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'un espace vectoriel normé E.
Si cette suite est convergente, alors elle est bornée (mais la réciproque est fausse !).

Par hypothèse, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant 1$, donc tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \|x_n\| \leqslant \|\ell\| + 1$.
Soit M le maximum de la famille finie des $\|x_k\|$ pour $0 \leqslant k < n_0$.
On alors, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\|x_n\| \leqslant \max(M, \|\ell\| + 1)$.
La réciproque est fausse : si $a \neq \overrightarrow{0}$, la suite $n \mapsto u_n = (-1)^n a$ est bornée, mais elle est divergente. □

Propriétés immédiates

– Toute suite stationnaire est convergente vers la valeur où elle stationne.
– Si la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ, la suite $n \mapsto \big(\|x_n\|\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\|\ell\|$.

| C'est une simple conséquence de l'inégalité $\big|\|x_n\| - \|\ell\|\big| \leqslant \|x_n - \ell\|$. □

– La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ si et seulement si la suite $n \mapsto \|x_n - \ell\|$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.2.2 (suite extraite d'une suite d'un espace vectoriel normé)
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites d'un espace vectoriel normé E.
On dit que la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est *extraite* de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ s'il existe une application $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, y_n = x_{\varphi(n)}$.

Remarques

– Rappel ! Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geqslant n$.

| Par récurrence. On a $\varphi(0) \geqslant 0$, et si $\varphi(n) \geqslant n$, alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. □

– Comme cas particulier de suite extraite, on peut définir la suite des termes d'indices pairs ($\varphi(n) = 2n$) ou la suite des termes d'indices impairs ($\varphi(n) = 2n+1$).
– On peut également considérer $\varphi :\ n \mapsto n + k$, où k est fixé.
La suite extraite $(y_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $y_0 = x_k,\ y_1 = x_{k+1},\ y_2 = x_{k+2},\ \ldots$ est alors notée $(x_n)_{n\geqslant k}$.

Proposition 5.2.3 (suite extraite d'une suite extraite)
Si la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est extraite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, et si la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est extraite de la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$, alors la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est extraite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

Cela peut sembler évident, mais il y a une petite subtilité.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissantes, telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = x_{\varphi(n)}$ et $z_n = y_{\psi(n)}$.
Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $z_n = y_{\psi(n)} = x_{\varphi(\psi(n))} = x_{\theta(n)}$, avec $\theta = \varphi \circ \psi$.
L'application $\theta = \varphi \circ \psi$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même, donc $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est extraite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
La « subtilité » tient au fait qu'on aurait pu s'attendre à $\psi \circ \varphi$ plutôt qu'à $\varphi \circ \psi$. □

Proposition 5.2.4 (toute suite extraite d'une suite convergente est elle-même convergente)
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente d'un espace vectoriel normé E.
Alors toute suite extraite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est encore convergente, avec la même limite.

Soit ℓ la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, et soit $(y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite extraite.
Il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N};\ y_n = x_{\varphi(n)}$.
On se donne ε quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par hypothèse, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tels que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$, donc : $\|y_n - \ell\| = \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$. □

Conséquence : si une suite extraite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ diverge, alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ diverge (idem si on connaît deux suites extraites qui sont convergentes mais qui ont des limites distinctes).

Proposition 5.2.5 (combinaisons linéaires de suites convergentes)
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites convergentes de l'espace vectoriel normé E.
Pour tous α,β de $\mathbb{K}$, la suite $n\mapsto \alpha x_n+\beta y_n$ converge, et $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\beta\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Posons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ et $\ell'=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$. On se donne ε quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Par hypothèse, il existe (n_0,n_1) dans $\mathbb{N}^2$ tels que : $\begin{cases}\forall n\geqslant n_0,\ \|x_n-\ell\|\leqslant\varepsilon\\ \forall n\geqslant n_1,\ \|y_n-\ell'\|\leqslant\varepsilon\end{cases}$.

Ainsi : $\forall n\geqslant \max(n_0,n_1),\ \|(\alpha x_n+\beta y_n)-(\alpha\ell+\beta\ell')\|\leqslant|\alpha|\,\|\ell-x_n\|+|\beta|\,\|y_n-\ell'\|\leqslant(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon$.

Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha\ell+\beta\ell'$. □

Proposition 5.2.6 (produit d'une suite scalaire et d'une suite vectorielle)
Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente de $\mathbb{K}$ et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente de E.
On pose $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=\lambda$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\ell$. Alors la suite $n\mapsto\lambda_n x_n$ converge, et $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n x_n=\lambda\ell$.

Soit ε quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Par hypothèse, il existe (n_0,n_1) dans $\mathbb{N}^2$ tels que : $\begin{cases}\forall n\geqslant n_0,\ |\lambda_n-\lambda|\leqslant\varepsilon\\ \forall n\geqslant n_1,\ \|x_n-\ell\|\leqslant\varepsilon\end{cases}$.

Ainsi : $\forall n\geqslant\max(n_0,n_1),\ \|\lambda_n x_n-\lambda\ell\|=\|\lambda_n(x_n-\ell)+(\lambda_n-\lambda)\ell\|\leqslant|\lambda_n|\,\|x_n-\ell\|+|\lambda_n-\ell|\,\|\ell\|$.

La suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente, donc bornée. Soit $M=\sup\limits_{n\geqslant 0}|\lambda_n|$.

Pour tout $n\geqslant\max(n_0,n_1)$, on a : $\|\lambda_n x_n-\lambda\ell\|\leqslant(M+\|\ell\|)\varepsilon$. Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n x_n=\lambda\ell$. □

Exercice 5.13 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x\in E,\ \|u(x)\|\leqslant\|x\|$. Montrer que $E=\operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id})\oplus\operatorname{Im}\,(u-\operatorname{Id})$.

Exercice 5.14
Soit E un espace vectoriel normé, également muni d'une structure d'anneau.
On suppose qu'il existe $\alpha\geqslant 0$ tel que $\forall(x,y)\in E^2,\ \|xy\|\leqslant\alpha\,\|x\|\,\|y\|$.
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites convergentes de E.
Montrer que la suite $n\mapsto x_n y_n$ converge, et que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.
Remarque : dans le même ordre d'idées, on pourra se reporter à la proprosition 5.2.12.

Posons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ et $\ell'=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$. On se donne ε quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Par hypothèse, il existe (n_0,n_1) dans $\mathbb{N}^2$ tels que : $\begin{cases}\forall n\geqslant n_0,\ \|x_n-\ell\|\leqslant\varepsilon\\ \forall n\geqslant n_1,\ \|y_n-\ell'\|\leqslant\varepsilon\end{cases}$.

Ainsi : $\forall n\geqslant\max(n_0,n_1),\ \|x_ny_n-\ell\ell'\|=\|x_n(y_n-\ell')+(x_n-\ell)\ell'\|\leqslant\|x_n(y_n-\ell')\|+\|(x_n-\ell)\ell'\|$.

Compte tenu de l'hypothèse, on obtient : $\forall n\geqslant\max(n_0,n_1),\ \|x_ny_n-\ell\ell'\|\leqslant\alpha(\|x_n\|\,\|y_n-\ell'\|+\|x_n-\ell\|\,\|\ell'\|)$.

La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente, donc bornée. Soit $M=\sup\limits_{n\geqslant 0}\|x_n\|$.

Pour tout $n\geqslant\max(n_0,n_1)$, on a : $\|x_ny_n-\ell\ell'\|\leqslant\alpha(M+\|\ell'\|)\varepsilon$. Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty}x_ny_n=\ell\ell'$.

5.2.2 Indépendance par rapport à la norme utilisée

Rappelons les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$:

– la « norme indice 1 » : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_p|$

– la « norme indice 2 », ou « norme euclidienne » : $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_p|^2}$

– la « norme indice ∞ » : $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$

Proposition 5.2.7 (comparaisons des normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$)
Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$, on a :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant p\,\|x\|_\infty \qquad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{p}\,\|x\|_\infty \qquad \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{p}\,\|x\|_2$$

– Les inégalités $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant p\,\|x\|_\infty$, c'est-à-dire : $\max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_i| \leqslant p \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$, sont évidentes.

– Les inégalités $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{p}\,\|x\|_\infty$, donc : $\max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{p} \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$, sont faciles.

– L'inégalité $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{p}\,\|x\|_2$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{p} |x_i| \leqslant \sqrt{p}\left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2\right)^{1/2}$ est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (prendre les y_i tous égaux à 1).

L'inégalité $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$, c'est-à-dire $\left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_i|$, est facile (élever au carré). □

Proposition 5.2.8 (admis : équivalences des normes en dimension finie)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit $x \mapsto N(x)$ et $x \mapsto N'(x)$ deux normes sur E.
Alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que : $\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$.
On exprime cette propriété en disant que les deux normes N et N' sont équivalentes.

Soit $B(a, r)$ et $B'(a, r)$ les boules ouvertes de centre a de rayon $r > 0$ pour, respectivement, N et N'.

Les encadrements (équivalents) $\begin{cases} \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x) \\ \dfrac{1}{\beta} N'(x) \leqslant N(x) \leqslant \dfrac{1}{\alpha} N'(x) \end{cases}$ donnent $\begin{cases} B\left(a, \dfrac{r}{\beta}\right) \subset B'(a, r) \subset B\left(a, \dfrac{r}{\alpha}\right) \\ B'(a, \alpha r) \subset B(a, r) \subset B'(a, \beta r) \end{cases}$

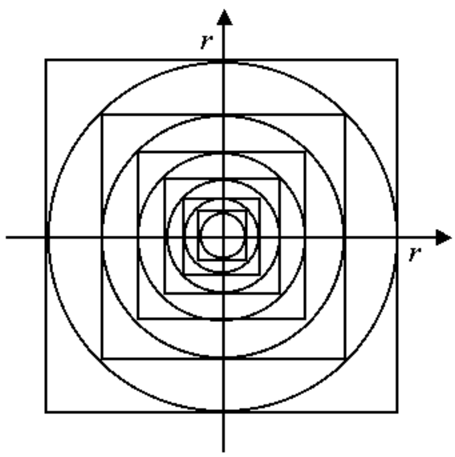
Plaçons-nous par exemple dans $E = \mathbb{R}^2$.

Pour tout x de E, on sait que : $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$.

La boule de centre $\overrightarrow{0}$ et de rayon r pour la norme $x \mapsto \|x\|_\infty$, contient la boule de centre $\overrightarrow{0}$ et de rayon r pour $x \mapsto \|x\|_2$.

Celle-ci contient elle-même la boule de centre $\overrightarrow{0}$ et de rayon $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ pour la norme $u \mapsto \|u\|_\infty$.

On peut bien sûr poursuivre cette succession d'inclusions, comme on le voit sur la figure ci-contre.



Exercice 5.15 (⇝ **corrigé**)
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque $A \mapsto N(A)$.
Montrer qu'il existe un coefficient $k > 0$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ N(AB) \leqslant kN(A)N(B)$.

Proposition 5.2.9 (indépendance de la convergence et de la limite par rapport à la norme utilisée)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit N et N' deux normes de E. On sait qu'elles sont équivalentes.
Une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de E est convergente au sens de la norme N si et seulement si elle l'est au sens de la norme N', et dans ce cas les deux limites sont égales.

Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que : $\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$.
On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ *au sens de la norme N*.
On se donne ε quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$. Il existe donc n_0 dans $\mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geqslant n_0,\ N(x_n - \ell) \leqslant \varepsilon$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a alors $N'(x_n - \ell) \leqslant \beta\varepsilon$.
Il en résulte la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ vers le vecteur ℓ *au sens de la norme N'*.
Évidemment, compte-tenu de la symétrie des rôles de N et N', toute réciproque est inutile. □

Proposition 5.2.10 (la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de E. Pour tout entier n, posons $x_n = \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}\, e_i$.
Alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans E si et seulement si les suites $n \mapsto x_{i,n}$ convergent dans $\mathbb{K}$.
Dans ces conditions, on a l'égalité : $\lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{i=1}^{p} \Big(\lim_{n\to\infty} x_{i,n}\Big) e_i$.

Puisque toutes les normes sur E sont équivalentes (voir proposition 5.2.8), le caractère convergent d'une suite de E, et sa limite éventuelle, ne dépendent pas de la norme utilisée (voir proposition 5.2.9) : on peut donc choisir de munir E de la « norme infini » associée à la base $\mathcal{B}$.

Cette norme est définie par $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant p} |\lambda_i|$, pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i$ de E.
Soit $\ell = \sum_{i=1}^{p} \ell_i\, e_i$ un élément de E. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $N(x_n - \ell) = \max_{1\leqslant i\leqslant p} |x_{i,n} - \ell_i|$.

- On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers le vecteur ℓ. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
  Il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ N(x - \ell) \leqslant \varepsilon$.
  Mais cela implique : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_{i,n} - \ell_i| \leqslant \varepsilon$. Ainsi : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lim_{n\to+\infty} x_{i,n} = \ell_i$.
- Réciproquement, on suppose que, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, la suite $n \mapsto x_{i,n}$ converge vers ℓ_i.
  Là encore, on se donne $\varepsilon > 0$ quelconque.
  Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, il existe n_i dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_i,\ |x_{i,n} - \ell_i| \leqslant \varepsilon$.
  On pose $n_0 = \max_{1\leqslant i\leqslant p} n_i$. On a alors : $\forall n \geqslant n_0,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ |x_{i,n} - \ell_i| \leqslant \varepsilon$, donc : $\forall n \geqslant n_0,\ N(x - \ell) \leqslant \varepsilon$.
  Il en résulte que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers le vecteur ℓ. □

5.2.3 Complément : propriété de Bolzano-Weierstrass

Proposition 5.2.11 (de toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente)
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
Alors, de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, on peut extraire une suite convergente.

Le caractère borné ou convergent d'une suite de E ne dépend pas de la norme utilisée.
On établit la propriété par récurrence sur la dimension p de E.

- Si $p=1$, la propriété est immédiate car le terme général de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ s'écrit $x_n=\lambda_n u$, où u est un vecteur non nul fixé (une base) de E, et où la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$. On applique alors « simplement » le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}$, qui dit que de toute suite bornée de $\mathbb{K}$, on peut extraire une suite convergente.
- On suppose que la propriété est vraie au rang $p-1$, avec $p\geqslant 2$.
  Soit $u\neq\overrightarrow{0}$ fixé dans E, et soit E' un supplémentaire de la droite $\mathbb{K}u$ dans E.
  Tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x=\lambda u+x'$, avec λ dans $\mathbb{K}$ et x' dans E'.
  Soit N' une norme (quelconque) sur E'.
  On vérifie facilement qu'on définit une norme sur E en posant $N(x)=|\lambda|+N'(x')$.
- On se donne maintenant une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ bornée de E.
  On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ x_n=\lambda_n u+x'_n$, avec λ_n dans $\mathbb{K}$ et x'_n dans E'. Ainsi : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ N(x_n)=|\lambda_n|+N'(x'_n)$.
  Puisque la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans E, il en est de même de $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathbb{K}$ et de $(x'_n)_{n\geqslant 0}$ dans E'.
  De la suite $(x'_n)_{n\geqslant 0}$, on peut extraire une suite convergente $(x'_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ (hypothèse de récurrence).
  De la suite scalaire bornée $(\lambda_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$, on extrait une suite convergente $(\lambda_{\theta(n)})_{n\geqslant 0}$.
  La suite $(x'_{\theta(n)})_{n\geqslant 0}$, extraite de la suite convergente $(x'_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$, est elle-même convergente.
  Si on note $\lim\limits_{+\infty}\lambda_{\theta(n)}=\lambda$ et $\lim\limits_{+\infty}x'_{\theta(n)}=\ell'$, on a alors $\lim\limits_{+\infty}x_{\theta(n)}=\lambda u+\ell'$
  Il suffit en effet pour cela de remarquer que $N(x_{\theta(n)}-(\lambda u+\ell'))=|\lambda_{\theta(n)}-\lambda|+N'(x'_{\theta(n)}-\ell')$.
- De la suite bornée $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on a donc extrait une suite convergente.
  Cela prouve la propriété au rang p et achève la récurrence. □

5.2.4 L'exemple des suites de matrices

Soit $n\mapsto A_n$ une suite de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour tout entier n, soit $a_{i,j}^{(n)}$ le terme d'indice (i,j) de A_n.
La suite $n\mapsto A_n$ converge vers A (de terme général $a_{i,j}$) dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ si et seulement si, pour tous indices i de $[\![1,n]\!]$ et j de $[\![1,p]\!]$, la suite numérique $n\mapsto a_{i,j}^{(n)}$ converge vers $a_{i,j}$.

C'est juste un cas particulier de la proposition 5.2.10, avec ici la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

Exercice 5.16 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Soit λ dans $\mathbb{R}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $A_n=\begin{pmatrix}1 & -\lambda/n\\ \lambda/n & 1\end{pmatrix}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n^n$.

Proposition 5.2.12 (convergence d'une suite de produits de matrices)
Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(B_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ et que $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty}A_nB_n=AB$.

Pour tout i, j de $[\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$, on a $[A_n B_n]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} [A_n]_{i,k} [B_n]_{k,j}$.

Or on sait que, pour tous indices i, j, k : $\lim_{n\to+\infty} [A_n]_{i,k} = [A]_{i,k}$, et que $\lim_{n\to+\infty} [B_n]_{k,j} = [B]_{k,j}$.

Il en résulte, pour tous i, j : $\lim_{n\to+\infty} [A_n B_n]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} [A]_{i,k} [B]_{k,j} = [AB]_{i,j}$, donc : $\lim_{n\to+\infty} A_n B_n = AB$. □

Le résultat précédent est le plus souvent utilisé avec des suites de matrices carrées.
Par exemple, si $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ et si P est inversible, alors $\lim_{n\to+\infty} (P^{-1} A_n P) = P^{-1} A P$.

Exercice 5.17 (⇝ **corrigé**)
À quelle condition sur A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{n\to+\infty} M^n = A$?

Exercice 5.18 (⇝ **corrigé**)
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 5.19 (⇝ **corrigé**)
Soit T dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, triangulaire supérieure, telle que : $\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ |T_{i,i}| < 1$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} T^n = 0$.

5.3 Topologie d'un espace vectoriel normé

5.3.1 Ouverts d'un espace vectoriel normé

Définition 5.3.1 (point intérieur)
Soit E un espace vectoriel normé, soit X une partie de E et soit a un élément de E.
On dit que a est *intérieur* à X s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans X.

Remarque évidente : les points intérieurs à X (s'il en existe) sont des éléments de X.

Définition 5.3.2 (ouvert d'un espace vectoriel normé)
Soit X un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.
On dit que X est un *ouvert* si tous les points de X sont intérieurs à X.

Proposition 5.3.1 (une boule ouverte est un ouvert)
Soit E un espace vectoriel normé. Toute boule ouverte de E est un ensemble ouvert.

Soit $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.
Soit b un élément de $B(a, r)$, et soit $\rho = \|b - a\|$ (donc $0 \leqslant \rho < r$).
Alors la boule ouverte $B(b, r - \rho)$ est incluse dans $B(a, r)$.
En effet : $\|y - b\| < r - \rho \Rightarrow \|y - a\| \leqslant \|y - b\| + \|b - a\| = \|y - b\| + \rho < r$.
Conclusion : $B(a, r)$ est un ensemble ouvert. □

Remarques

– **Important** : si $\dim(E) < \infty$ (c'est le cadre du programme de la classe), le fait qu'un sous-ensemble de E soit (ou ne soit pas) ouvert ne dépend pas de la norme utilisée ;

> Si on se donne deux normes N et N', on sait qu'elle sont équivalentes (voir proposition 5.2.8).
> En particulier (voir la remarque suivant la proposition 5.2.8), toute boule ouverte et de rayon strictement positif (pour l'une des deux normes) contient une boule ouverte et de rayon strictement positif (pour l'autre norme) : si un ensemble est ouvert pour l'une des deux normes, alors il est ouvert pour l'autre. □

– les ensembles E et $\emptyset$ sont des cas (très) particuliers d'ouverts de E ;

– une réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert ;

> Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E. Soit $\Omega = \bigcup_{i\in I} U_i$ et soit a un élément de Ω.
> Il existe i dans I tel que a soit dans U_i.
> Comme U_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U_i$. On a $B(a, r) \subset U_i \subset \Omega$, donc Ω est ouvert. □

– une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

> Soit $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie d'ouverts de E. Soit $\Omega = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant p} U_i$ et soit a un élément de Ω.
> Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, a est dans l'ouvert U_i.
> Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, il existe donc $r_i > 0$ tel $B(a, r_i) \subset U_i$. On pose alors $r = \min_{1\leqslant i\leqslant p} r_i > 0$.
> On a $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset U_i$ pour tout i, donc $B(a, r) \subset \Omega$, donc Ω est ouvert. □

5.3.2 Fermés d'un espace vectoriel normé

Définition 5.3.3 (point adhérent à une partie)
Soit E un espace vectoriel normé, soit X une partie de E et soit a un élément de E.
On dit que a est *adhérent* à X si, pour tout $r > 0$ l'intersection $X \cap B(a, r)$ est non vide.

Remarque évidente : les points de X sont adhérents à X.

Définition 5.3.4 (fermé d'un espace vectoriel normé)
Soit X un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.
On dit que X est un *fermé* s'il contient (donc s'il est égal à) l'ensemble de ses points adhérents.

Proposition 5.3.2 (les fermés sont les complémentaires des ouverts)
Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E.
Alors X est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.

> Soit X une partie de E, et soit X^c son complémentaire dans E.
> On a les équivalences suivantes.
> L'ensemble X est fermé $\Leftrightarrow$ aucun des éléments de X^c n'est adhérent à X
> $\Leftrightarrow$ pour tout a de X^c, il existe $r > 0$ tel que $X \cap B(a, r)$ soit vide
> $\Leftrightarrow$ pour tout a de X^c, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r)$ soit inclus dans X^c
> $\Leftrightarrow$ X^c est un ensemble ouvert □

Propriétés

- **Important** : si $\dim(E) < \infty$ (c'est le cadre du programme de la classe), le fait qu'un sous-ensemble de E soit (ou ne soit pas) fermé ne dépend pas de la norme utilisée.
- Les ensembles E et $\emptyset$ sont des fermés (très) particuliers de E. Les singletons sont des fermés.
- Les unions *finies* de fermés sont des fermés. Les intersections *quelconques* de fermés sont des fermés. En particulier, tout ensemble fini est fermé.

> Il suffit d'utiliser un passage au complémentaire et les propriétés vues précédemment sur les unions quelconques (ou les intersections finies) d'ensembles ouverts. □

Proposition 5.3.3 (une boule fermée, ou une sphère, est un fermé)
Si E est un espace vectoriel normé, toute boule fermée et toute sphère de E est un ensemble fermé.

> – Soit b un point adhérent à $\overline{B}(a,r)$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit x_n dans l'ensemble non vide $\overline{B}(a,r)\cap B\Big(b,\dfrac{1}{n}\Big)$.
> On a : $\|b-a\| \leqslant \|a-x_n\| + \|x_n-b\| \leqslant r + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
> On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $\|b-a\| \leqslant r$, c'est-à-dire $b \in \overline{B}(a,r)$.
> On a ainsi démontré que $\overline{B}(a,r)$ est un sous-ensemble fermé de E.
>
> – Soit b un point adhérent à $S(a,r)$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit x_n dans l'ensemble non vide $S(a,r)\cap B\Big(b,\dfrac{1}{n}\Big)$.
> Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\|a-x_n\| - \|b-x_n\| \leqslant \|b-a\| \leqslant \|a-x_n\| + \|x_n-b\|$.
> Ainsi : $\forall n \geqslant 1,\ r - \dfrac{1}{n} \leqslant \|b-a\| \leqslant r + \dfrac{1}{n}$, puis (quand $n \to +\infty$) : $\|b-a\| = r$, donc $b \in S(a,r)$.
> On a ainsi démontré que $S(a,r)$ est un sous-ensemble fermé de E.
>
> – On peut également dire que $S(a,r)$ est l'intersection de deux fermés : d'une part la boule fermée $\overline{B}(a,r)$, d'autre part le complémentaire de la boule ouverte $B(a,r)$. □

NB : on retiendra de ce qui précède que si E un espace vectoriel normé de dimension finie (c'est le cadre du programme de la classe de PSI), deux normes sur E définissent les mêmes ouverts et les mêmes fermés (on dit encore : « définissent la même *topologie* »).

Proposition 5.3.4 (caractérisation séquentielle de la notion de point adhérent ou d'ensemble fermé)
Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E.
Un élément a de E est adhérent à X si et seulement si il est la limite d'une suite d'éléments de X.
L'ensemble X est donc fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente de X est dans X.

> – Soit a un point adhérent à une partie partie X de E.
> Pour tout entier naturel n, on peut choisir x_n dans l'ensemble non vide $X \cap B\Big(a,\dfrac{1}{n+1}\Big)$.
> On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de X telle que : $\forall n \geqslant 0,\ \|x_n - a\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc telle que $\lim\limits_{+\infty} x_n = a$.
>
> – Réciproquement, soit ℓ la limite d'une suite convergente $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de X.
> Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| < \varepsilon$.
> En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $X \cap B(\ell,\varepsilon) \neq \emptyset$: le vecteur ℓ est donc adhérent à X.
>
> – Enfin, une partie X de E est fermée si et seulement si elle contient ses points adhérents (définition 5.3.4), c'est-à-dire les limites des suites convergentes d'éléments de X. □

Exercice 5.20 (⇝ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E.

Exercice 5.21 (⇝ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que tout fermé X de E peut s'écrire comme l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts Ω_n.

Définition 5.3.5 (intérieur, adhérence, frontière)
Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E.
- on note $\mathring{X}$ et on appelle *intérieur* de X l'ensemble des points de X qui sont intérieurs à X.
- on note $\overline{X}$ et on appelle *adhérence* de X l'ensemble des points de E qui sont adhérents à X.
- on note $\mathrm{Fr}(X)$ et on appelle *frontière* de X l'ensemble des points de E qui sont adhérents à la fois à X et au complémentaire de X.

Important : toujours sous l'hypothèse $\dim(E) < \infty$, les notions de point adhérent, d'intérieur, d'adhérence, et de frontière ne dépendent pas de la norme utilisée sur E.

L'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$.

La frontière de $B(a, r)$, ou de $\overline{B}(a, r)$, est la sphère de centre a et de rayon r.

Exercice 5.22 (⇝ **corrigé**)
Soit X une partie de l'espace vectoriel normé E.
Montrer que $\mathring{X}$ est le plus grand ouvert inclus dans X, et que $\mathring{X} = X$ si et seulement si X est ouvert.

Exercice 5.23 (⇝ **corrigé**)
Soit X une partie de l'espace vectoriel normé E.
L'ensemble $\bar{X}$ est le plus petit fermé contenant X, et $\bar{X} = X$ si et seulement si X est fermé.

Définition 5.3.6 (complément : partie dense dans un espace vectoriel normé)
Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E.
On dit que X est *dense* dans E si $\overline{X} = E$, c'est-à-dire si tout point de E est adhérent à X.

Si un fermé Y de E contient une partie dense X, alors $Y = E$.

NB : rappelons (une fois de plus) que les notions développées dans les sections 5.2 et 5.3 ne dépendent pas de la norme utilisée sur l'espace vectoriel normé E, dans la mesure où celui-ci est de dimension finie (ce qui est le cadre du programme de mathématiques de la classe de PSI).

5.4 Limite et continuité en un point

Important : dans cette section, E, F et G sont des espaces vectoriels normés *de dimension finie* sur $\mathbb{K}$.

Les normes sur les espaces vectoriels E, F et G seront toujours notées $x \mapsto \|x\|$.

5.4.1 Limites dans un espace vectoriel normé

Définition 5.4.1 (limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine)
Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.
Soit a un point adhérent à $\mathcal{D}$. Soit ℓ un élément de F.
On dit que ℓ est limite de f en a si : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D},\ \big(\|x-a\| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\| \leqslant \varepsilon\big)$.
La limite de f en a, si elle existe, est unique. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou plus simplement : $\lim\limits_{a} f = \ell$

L'unicité de la limite (si elle existe) se prouve comme dans la proposition 5.2.1 :
On suppose qu'il existe ℓ et ℓ' répondant à la définition précédente. On se donne ε quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tels que : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{D},\ (\|x-a\| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\| \leqslant \varepsilon) \\ \forall\, x \in \mathcal{D},\ (\|x-a\| \leqslant \delta' \Rightarrow \|f(x)-\ell'\| \leqslant \varepsilon) \end{cases}$.
Ainsi : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ \|x-a\| \leqslant \min(\delta,\delta') \Rightarrow \|\ell-\ell'\| \leqslant \|f(x)-\ell\| + \|f(x)-\ell'\| \leqslant 2\varepsilon$.
Il en résulte $\|\ell-\ell'\| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\|\ell-\ell'\| = 0$, c'est-à-dire $\ell = \ell'$. □

Remarques

– La définition 5.4.1 peut s'écrire : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ f\Big(\overline{B}(a,\delta) \cap \mathcal{D}\Big) \subset \overline{B}(\ell,\varepsilon)$.
Dans cette définition, on peut remplacer les boules fermées par des boules ouvertes.

– L'existence de la limite de f en a, et la valeur éventuelle de cette limite, ne dépendent pas des normes utilisées (car les espaces vectoriels normés E et F sont supposés de dimension finie).

– Dans le cas particulier où a appartient au domaine $\mathcal{D}$ de f, la limite ne peut être que $f(a)$.

– L'existence et la valeur de $\lim\limits_{a} f$ ne changent pas si on remplace $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D} \cap B(a,r)$ où $r > 0$.
On exprime cette propriété en disant que la notion de limite est une *notion locale*.

Proposition 5.4.1 (caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite)
Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.
Soit a un point adhérent à $\mathcal{D}$. Soit ℓ un élément de F.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
– *la limite de f en a existe et est égale à ℓ.*
– *pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{D}$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.*

– On suppose que $\lim\limits_{a} f = \ell$, et on se donne une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{D}$ convergeant vers a.
On se donne un réel strictement positif ε.
Par hypothèse sur f : $\exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D},\ (\|x-a\| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\| \leqslant \varepsilon)$.
Avec ce δ, et par hypothèse sur la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant \delta$.
On en déduit : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \|f(x_n)-\ell\| \leqslant \varepsilon$.

En résumant : $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ \|f(x_n)-\ell\|\leqslant\varepsilon$: on a prouvé $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$.

– On procède par contraposition. On suppose donc qu'on n'a pas $\lim\limits_a f=\ell$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe donc x_n dans $\mathcal{D}\cap B\Big(a,\dfrac{1}{n+1}\Big)$ tel que $\|f(x_n)-\ell\|>\varepsilon$.

Ainsi la suite $(x_n)_{n\geqslant0}$ de $\mathcal{D}$ converge vers a, mais la suite $(f(x_n))_{n\geqslant0}$ ne converge pas vers ℓ. □

Proposition 5.4.2 (limite et composantes dans une base de l'espace d'arrivée)

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.

Soit a un point adhérent à $\mathcal{D}$. Soit ℓ un élément de F.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_p)$ une base de F. Posons $\ell=\sum\limits_{i=1}^{p}\ell_i\,e_i$ et, pour tout x de E : $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{p}f_i(x)\,e_i$.

Les fonctions f_i, définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, sont appelées les fonctions composantes *de f.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

– la limite de f en a existe et est égale à ℓ.

– pour tout i de $[\![1,p]\!]$, la limite de la fonction composante f_i en a existe et est égale à ℓ_i.

On sait que l'existence (et la valeur) de la limite d'une fonction ne dépendent pas de la norme utilisée.

On munit F de la « norme infini » associée à $\mathcal{B}$, définie par $\|y\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p}|\lambda_i|$ pour tout $y=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\,e_i$.

Soit $\ell=\sum\limits_{i=1}^{p}\ell_i\,e_i$ un élément de F. Pour tout x de $\mathcal{D}$, on a $N(f(x)-\ell)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p}|f_i(x)-\ell_i|$.

– On suppose que $\lim\limits_a f=\ell$. Soit ε un réel strictement positif quelconque.

Il existe $\delta>0$ tel que : $\forall x\in\mathcal{D}\cap\overline{B}(a,\delta),\ \|f(x)-\ell\|\leqslant\varepsilon$.

Il en résulte : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \forall x\in\mathcal{D}\cap\overline{B}(a,\delta),\ |f_i(x)-\ell_i|\leqslant\varepsilon$. Ainsi : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \lim\limits_a f_i=\ell_i$.

– Réciproquement, on suppose que $\lim\limits_a f_i=\ell_i$ pour tout i de $[\![1,p]\!]$.

Là encore, on se donne $\varepsilon>0$ quelconque.

Pour tout i de $[\![1,p]\!]$, il existe $\delta_i>0$ tel que : $\forall x\in\mathcal{D}\cap\overline{B}(a,\delta_i),\ |f_i(x)-\ell_i|\leqslant\varepsilon$.

On pose $\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant p}\delta_i>0$. Avec ces notations $\overline{B}(a,\delta)\subset\overline{B}(a,\delta_i)$ pour tout i de $[\![1,p]\!]$.

On a alors : $\forall x\in\mathcal{D}\cap\overline{B}(a,\delta),\ \forall i\in[\![1,p]\!],\ |f_i(x)-\ell_i|\leqslant\varepsilon$.

Il en résulte : $\forall x\in\mathcal{D}\cap\overline{B}(a,\delta),\ \|f(x)-\ell\|\leqslant\varepsilon$. On a donc obtenu : $\lim\limits_a f=\ell$. □

Proposition 5.4.3 (combinaisons linéaires et limites de fonctions)

Soit f et g deux applications de $\mathcal{D}\subset E$ dans F. Soit a un point adhérent à $\mathcal{D}$.

On suppose que les limites de f et g en a existent et valent respectivement ℓ et ℓ'.

Alors, pour tous scalaires α et β, on a : $\lim\limits_a(\alpha f+\beta g)=\alpha\ell+\beta\ell'$.

On pourrait procéder directement, mais on va utiliser la caractérisation séquentielle des limites (proposition 5.4.1) et un résultat déjà connu sur les limites de suites (proposition 5.2.5).

On suppose $\lim\limits_a f=\ell$ et $\lim\limits_a g=\ell'$. Soit $(x_n)_{n\geqslant0}$ une suite de $\mathcal{D}$, convergente vers a.

Par hypothèse sur f et g, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)=\ell'$ (caractérisation séquentielle).

D'après la proposition 5.2.5, on en déduit $\lim_{n\to+\infty}(\alpha f(x_n)+\beta g(x_n))=\alpha\ell+\beta\ell'$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(\alpha f+\beta g)(x_n)=\alpha\ell+\beta\ell'$, et ceci pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{D}$ convergeant vers a.

Il en résulte (toujours d'après la caractérisation séquentielle des limites) que $\lim_a(\alpha f+\beta g)=\alpha\ell+\beta\ell'$. □

▷ Complément : produit de limites

Pour écrire une propriété du genre $(\lim_a f=\ell,\ \lim_a g=\ell')\Rightarrow\lim_a fg=\ell\ell'$, c'est plus compliqué :

- Si f et g sont toutes deux définies sur $\mathcal{D}\subset E$ et à valeurs dans F, il faut que l'espace d'arrivée F soit muni d'une structure d'anneau, et il faut une hypothèse de type $\|xy\|\leqslant\alpha\,\|x\|\,\|y\|$ (voir le complément à la fin de la sous-section **??**). Mais c'est hors-programme.
- Si $\begin{cases}f:\mathcal{D}\subset E\to\mathbb{K}\\ g:\mathcal{D}\subset E\to F\end{cases}$ et si $\begin{cases}\lim_a f=\lambda\\ \lim_a g=\ell\end{cases}$ alors on a $\lim_a fg=\lambda\ell$ (utiliser 5.2.6).
- Si $\begin{cases}f:\mathcal{D}\subset E\to\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\\ g:\mathcal{D}\subset E\to\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})\end{cases}$ et si $\begin{cases}\lim_a f=A\\ \lim_a g=B\end{cases}$ alors on a $\lim_a fg=AB$ (utiliser 5.2.12).

Proposition 5.4.4 (composition de limites)
On se donne trois espaces vectoriels normés E,F,G (de dimension finie).
Soit $f:\mathcal{D}\subset E\to F$. Soit a un point adhérent à $\mathcal{D}$.
On suppose que $\lim_a f=b$: il en résulte que b est adhérent à $f(\mathcal{D})$.
Soit $g:\mathcal{D}'\subset F\to G$, avec $f(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}'$ (donc $g\circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$ et b est adhérent à $\mathcal{D}'$).
On suppose $\lim_b g=\ell$. Alors $\lim_a g\circ f=\ell$.

On peut faire une démonstration directe, ou utiliser la caractérisation séquentielle des limites.

- On se donne un réel strictement positif ε.

  Par hypothèse sur g, il existe $\delta>0$ tel que $g(\mathcal{D}'\cap\overline{B}(b,\delta))\subset\overline{B}(\ell,\varepsilon)$.

  Avec un tel δ, et par hypothèse sur f, il existe $\alpha>0$ tel que $f(\mathcal{D}\cap\overline{B}(a,\alpha))\subset\overline{B}(b,\delta)$.

  Compte-tenu de l'hypothèse $f(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}'$, on a en fait l'inclusion $f(\mathcal{D}\cap\overline{B}(a,\alpha))\subset\mathcal{D}'\cap\overline{B}(b,\delta)$.

  On en déduit les implications : $x\in\mathcal{D}\cap\overline{B}(a,\alpha)\Rightarrow f(x)\in\mathcal{D}'\cap\overline{B}(b,\delta)\Rightarrow g(f(x))\in\overline{B}(\ell,\varepsilon)$.

  On a donc démontré que $\lim_a g\circ f=\ell$.

- Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite quelconque de $\mathcal{D}$, convergeant vers a.

  Alors la suite $(y_n=f(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers b (sens direct de la caractérisation séquentielle).

  Cela montre d'ailleurs que b est adhérent à $f(\mathcal{D})$, donc à $\mathcal{D}'$.

  Toujours par caractérisation séquentielle, la suite $(z_n=g(y_n)=g\circ f(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

  Cela étant vrai pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{D}$ (le domaine de définition de $g\circ f$) convergeant vers a, il en découle $\lim_a g\circ f=\ell$ (c'est le sens réciproque de la caractérisation séquentielle des limites). □

5.4.2 Continuité en un point

Définition 5.4.2 (continuité en un point)
Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F. Soit a un élément de $\mathcal{D}$.
On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a existe (donc si elle est égale à $f(a)$) :
$(f$ continue en $a) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_a f = f(a) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \forall\,x \in \mathcal{D} \cap \overline{B}(a,\delta),\ f(x) \in \overline{B}(f(a),\varepsilon)\big)$

Cette notion ne dépend pas des normes utilisées sur E ou F (car $\dim(E) < \infty$ et $\dim(F) < \infty$).

Proposition 5.4.5 (caractérisation séquentielle de la continuité)
L'application $f : \mathcal{D} \subset E \to F$ est continue au point a de $\mathcal{D}$ si et seulement si, pour toute suite $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{D}$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(a)$.

Simple reprise de la proposition 5.4.1 dans le cas particulier $\ell = f(a)$. □

Proposition 5.4.6 (continuité en un point, et composantes dans une base de l'espace d'arrivée)
Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de F. Posons, pour tout x de E : $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i(x)\, e_i$.
Alors f est continue en un point a de $\mathcal{D}$ si et seulement si ses composantes f_i sont continues en a.

Simple reprise de la proposition 5.4.2 dans le cas particulier $\ell = f(a) = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i(a)\, e_i$. □

5.5 Applications continues

On rappelle que tous les espaces vectoriels normés sont supposés de dimension finie.

5.5.1 Continuité sur une partie

Définition 5.5.1 (continuité sur une partie de l'ensemble de départ)
L'application $f : \mathcal{D} \subset E \to F$ est dite continue sur $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.
On note souvent $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$ l'ensemble des applications continues de $\mathcal{D} \subset E$ dans F.

Proposition 5.5.1 (combinaisons linéaires d'applications continues)
Soit f et g deux applications continues sur $\mathcal{D} \subset E$, à valeurs dans F.
Pour tous scalaires α et β, l'application $\alpha f + \beta g$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Simple application de la proposition 5.4.3, avec $\ell = f(a)$ et $\ell' = g(a)$ pour tout a de $\mathcal{D}$. □

Proposition 5.5.2 (composition d'applications continues)
Soit $f\colon \mathcal{D} \subset E \to F$. Soit $g\colon \mathcal{D}' \subset F \to G$.
On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$, de sorte que $g \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans G.
Si f est continue sur $\mathcal{D}$ et si g est continue sur $f(\mathcal{D})$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Simple application de la proposition 5.4.4 avec $b = f(a)$ et $\ell = g(b)$ pour tout a de $\mathcal{D}$. □

Proposition 5.5.3 (continuité et composantes dans une base de l'espace d'arrivée)
Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de F. Pour tout élément x de E, posons $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, e_i$.
Alors f est continue sur $\mathcal{D}$ si et seulement si les f_i sont continues sur $\mathcal{D}$.

Simple application de la proposition 5.4.6 pour tout a de $\mathcal{D}$. □

Proposition 5.5.4 (image réciproque de $\{0\}$, de $\mathbb{R}^+$ ou de $\mathbb{R}^{+*}$ par f continue)
Si f est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Si f et g sont continues de E dans $\mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E,\ f(x) = g(x)\}$ et $\{x \in E,\ f(x) \geqslant g(x)\}$ sont fermés, et l'ensemble $\{x \in E,\ f(x) > g(x)\}$ est ouvert.

– Soit a un élément de E tel que $f(a) > 0$.
  Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, et notamment si $\varepsilon = \frac{1}{2}\,|f(a)|$.
  Il existe donc $\delta > 0$ tel que : $\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}\,|f(a)| \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{2}\,|f(a)| > 0$.
  On a donc l'inclusion $B(a, \delta) \subset f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$ est un ensemble ouvert.
  Avec la même démonstration, on voit bien sûr que $f^{-1}(\mathbb{R}^{-*})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^{*})$ sont des ouverts.
– Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $f^{-1}(\{0\})$, convergente vers a. Ainsi $f(x_n) = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
  L'application f étant continue, on a $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$, donc $f(a) = 0$ donc $a \in f^{-1}(\{0\})$.
  On a donc prouvé que l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ est fermé.
  La preuve est analogue pour $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et pour $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ (changer $=$ en $\geqslant$ ou $\leqslant$). □

Cela se généralise facilement : si f est continue de E dans $\mathbb{R}$, l'image réciproque d'un intervalle ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ est une partie ouverte (resp. fermée) de E.

L'exercice suivant propose une généralisation de ces résultats :

Exercice 5.24 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Soit E, F deux espaces vectoriels normées de dimension finie. Soit $f\colon E \to F$ une application continue.
a) Montrer que l'image réciproque par f d'un ouvert de F est un ouvert de E.
b) Montrer que l'image réciproque par f d'un fermé de F est un fermé de E.

On notera également que si les applications f et g sont continues de E dans F, alors l'ensemble des points x de E tels que $f(x) = g(x)$ est un fermé de E. En particulier si f et g sont égales sur une partie dense de E, alors f et g sont égales sur E tout entier.

Simple conséquence de la continuité de $f - g$. □

Proposition 5.5.5 (cas d'une fonction réelle continue sur un fermé borné)
Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit X une partie fermée bornée de E.
Alors $f(X)$ est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}$.
En particulier il existe x_0 et x_1 dans X tels que $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$ et $f(x_1) = \max_{x \in X} f(x)$.

On retiendra que si une fonction réelle est continue sur un fermé borné X d'un espace vectoriel normé E (de dimension finie) alors f est bornée sur X et « elle y atteint ses bornes ».

- Par l'absurde, on suppose que $f(X)$ n'est pas une partie bornée de $\mathbb{R}$.
  Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe x_n dans X tel que $|f(x_n)| \geqslant n$.
  De la suite bornée $(x_n)_{n \geqslant 0}$, on peut extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ (voir proposition 5.2.11).
  Posons $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = a$. Par continuité de f en a, il en découle $\lim_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(a)$.
  Mais c'est en contradiction avec le fait que $|f(x_{\varphi(n)})| \geqslant \varphi(n) \geqslant n$ pour tout n.
- Pour montrer que $f(X)$ est fermé, on se donne une suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ convergente d'éléments de $f(X)$.
  Posons $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = \lambda$. Il s'agit de montrer que λ est lui aussi dans $f(X)$ (voir proposition 5.3.4).
  Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de X telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = f(x_n)$.
  De la suite bornée $(x_n)_{n \geqslant 0}$, on peut extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ (proposition 5.2.11).
  Posons $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = a$. Par continuité de f en a, il en découle $\lim_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(a)$.
  Mais la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \geqslant 0}$ est extraite de la suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$, donc elle converge vers λ.
  Il en résulte $\lambda = f(a)$. On a donc prouvé que $f(X)$ est fermé de $\mathbb{R}$.
- Ainsi $f(X)$ est fermé borné (non vide) dans $\mathbb{R}$.
  Il en découle que les réels $\inf(f(X))$ et $\sup(f(X))$ sont des éléments de $f(X)$.
  Autrement dit : il existe x_0 et x_1 dans X tels que $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$ et $f(x_1) = \max_{x \in X} f(x)$. □

Remarque : si $f : E \to F$ est continue, et si X est une partie fermée bornée (non vide) de E, alors $f(X)$ est une partie fermée bornée (non vide) de F (il suffit de reprendre la démonstration précédente, en remplaçant les valeurs absolues sur $\mathbb{R}$ par des normes sur F. En revanche, la deuxième partie du résultat (qui parle du minimum et du maximum de f sur X) n'a de sens que si $F = \mathbb{R}$.

5.5.2 Fonctions continues particulières

Définition 5.5.2 (applications lipschitziennes)
Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.
Soit λ un réel strictement positif.
On dit que f est λ-*lipschitzienne* sur $\mathcal{D}$ si : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \lambda \|x - y\|$.
On dit aussi « f est lipschitzienne de rapport λ ».
Dans le cas particulier où $0 < \lambda < 1$, on dit que f est *contractante*.

Si on change de norme, l'application f reste lipschitzienne (mais pas forcément avec le même λ).

Si f est λ-lipschitzienne, et si $\mu > \lambda$, alors f est a fortiori μ-lipschitzienne.

Proposition 5.5.6 (toute application lipschitzienne est continue)
Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de E, à valeurs dans F.
Si f est lispchitzienne sur $\mathcal{D}$, alors f est continue sur $\mathcal{D}$ (réciproque fausse).

Soit a un élément de $\mathcal{D}$, et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathcal{D}$, convergente vers a.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\|f(x_n) - f(a)\| \leqslant \lambda \|x_n - a\|$, et par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - a\| = 0$.
Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_n) - f(a)\|$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
Ainsi f est continue en tout point de $\mathcal{D}$. □

Propriétés et exemples

– On dit qu'une application f de E dans F est une *isométrie* si : $\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
Les isométries sont lipschitziennes donc sont continues.

– **Important** : l'application *norme* de E dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne donc continue.
En effet : $\forall (x, y) \in E^2,\ |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

Exercice 5.25 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit A une partie non vide de E.

a) Pour tout x de E, on note $d_A(x) = \inf\limits_{x\in A} d(x, a)$. Montrer que la fonction $d_A : x \mapsto d(x, A)$ est continue.

b) On suppose que A est fermé borné. Montrer : $\forall x \in E,\ \exists a \in A,\ d_A(x) = \|x - a\|$.

c) Montrer que le résultat précédent reste vrai si on suppose seulement que A est fermé.

d) On suppose que la norme E est déduite d'un produit scalaire et que l'ensemble A est fermé convexe.
Pour tout x de E, montrer qu'il existe un *unique* a de A (noté $\pi_A(x)$) tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.

e) En gardant les mêmes hypothèses que dans la question e), préciser $\pi_A(x)$ dans les deux cas suivants :
   – L'ensemble A est un sous-espace vectoriel de E.
   – L'ensemble A est une boule fermée de E.

Proposition 5.5.7 (continuité des applications linéaires)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On rappelle que E est de dimension finie.
Alors f est lipschitzienne (donc continue) sur E.

On sait que la continuité d'une application entre deux espaces vectoriels normés E et F (de dimension finie, comme toujours) ne dépend pas des normes utilisées.
Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de E.
On munit E de la « norme indice 1 » associée à $\mathcal{B}$, définie par $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{p} |x_i|$ pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\, e_i$.
Posons $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \|f(e_i)\|$. Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\, e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{p} y_i\, e_i$ deux vecteurs quelconques de E.
On obtient facilement :

$$\|f(x)-f(y)\| = \Big\|f\Big(\sum_{i=1}^{p} x_i\,e_i\Big) - f\Big(\sum_{i=1}^{p} y_i\,e_i\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{p}(x_i-y_i)f(e_i)\Big\| \leqslant \sum_{i=1}^{p}|x_i-y_i|\,\|f(e_i)\| \leqslant M\,\|x-y\|_1.$$

Ainsi l'application linéaire f est lipschitzienne (donc continue) sur E. □

Définition 5.5.3 (fonctions coordonnées, monômes et polynômes sur $\mathbb{K}^n$)
L'application $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$ est appelée i-ième fonction coordonnée sur $\mathbb{K}^n$.
On appelle fonction monôme sur $\mathbb{K}^n$ tout produit de fonctions coordonnées.
On appelle fonction polynôme sur $\mathbb{K}^n$ toute combinaison linéaire de fonctions monômes sur $\mathbb{K}^n$.

Par exemple, la fonction $(x,y,z,t)\mapsto xy^3t^2$ est une fonction monôme sur $\mathbb{K}^4$.
De même, la fonction $(x,y,z,t)\mapsto 1+4xyz+y^3t^2-x^4$ est une fonction polynôme sur $\mathbb{K}^4$.

Proposition 5.5.8 (continuité des fonctions coordonnées, monômes, ou polynômes sur $\mathbb{K}^n$)
Les fonctions coordonnées, monômes, ou polynômes sur $\mathbb{K}^n$ sont continues.

Toute fonction coordonnée $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$ est linéaire donc continue sur $\mathbb{K}^n$.
Toute fonction monôme sur $\mathbb{K}^n$ est continue, car produit de fonctions coordonnées sur $\mathbb{K}^n$.
Toute fonction polynôme sur $\mathbb{K}^n$ est alors continue, car combinaison linéaire de fonctions monômes. □

Proposition 5.5.9 (continuité des applications multilinéaires)
Les applications multilinéaires de $\mathbb{K}^n\times\cdots\times\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ sont continues.

- On se place ici dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}^n)^p=\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\times\cdots\times\mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K}^n$ est répété p fois).
  On peut l'identifier à l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices A de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où chacune des p colonnes $C_1,\dots,C_p$ de A est elle-même identifiée à un vecteur de $\mathbb{K}^n$).
  Chaque colonne C_j de $A=(a_{i,j})$ s'écrit, dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$: $C_j=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e_i$.
  On munit (par exemple) $\mathbb{K}^n$ de sa « norme indice 1 » dans la base canonique.
  On en déduit une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})=(\mathbb{K}^n)^p$ (la « norme indice 1 » sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans sa base canonique).
  Cette norme est définie par : $\|A\|_1=\|(C_1,\dots,C_p)\|_1=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\|C_j\|_1=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|$.
- Soit $f\colon(\mathbb{K}^n)^p\to\mathbb{K}$ une application p-linéaire.
  Pour tout élément $A=(a_{i,j})=(C_1,\dots,C_p)$ de E, on a (en développant par p-linéarité) :
  $$f(A)=f(C_1,\dots,C_p)=f\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}e_i,\dots,\sum_{i=1}^{n}a_{i,p}e_i\Big)=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_p=1}^{n}a_{i_1,1}a_{i_2,2}\cdots a_{i_p,p}f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_p})$$
  On voit que $f(A)$ est une expression polynomiale par rapport aux coordonnées $a_{i,j}$ de A dans la base canonique (plus précisément, ce polynôme est homogène de degré p, mais cela est sans importance ici).
  Il en résulte que l'application f est continue. □

Exercice 5.26 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel euclidien.
Montrer que $\Omega=\{(x,y)\in E^2,(x,y)\text{ libre}\}$ est un ouvert de $E\times E$.

Exercice 5.27 (⇝ **corrigé**)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 5.28 (⇝ **corrigé**)
Montrer que le groupe orthogonal $O(n)$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.5.10 (continuité de l'application déterminant)
L'application déterminant : $A \mapsto \det(A)$ *est continue sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On identifie les colonnes d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à des éléments de $\mathbb{K}^n$.
L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'identifie alors l'espace vectoriel produit $(\mathbb{K}^n)^n$.
Avec cette identification, on sait que l'application $A \mapsto \det(A)$ est multilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Il en résulte que cette application est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

Proposition 5.5.11 (l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est un ouvert)
L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ *des matrices carrées inversibles d'ordre* n *est un ouvert de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, $GL_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application $A \mapsto \det(A)$. □