Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

7.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

On considère des applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 7.1.1 (convergence simple, sur un intervalle, d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est *simplement convergente* sur I si, pour tout x de I, la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si on pose $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout x de I, on dit que la fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est la *limite simple*, sur l'intervalle I, de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

L'application f est ici caractérisée par : $\forall\, x \in I,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Dans cette définition, on notera que l'entier n_0 est fonction à la fois de ε et de x.

Définition 7.1.2 (convergence uniforme, sur un intervalle, d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est *uniformément convergente* sur I s'il existe $f : I \to \mathbb{K}$ telle que :
- les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang)
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

L'application f est ici caractérisée par : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Dans cette définition, on notera que l'entier n_0 n'est plus fonction de x, mais uniquement de ε.

On utilise souvent les expressions :
- « la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement (resp. uniformément) vers f sur I »
- « la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f sur I au sens de la convergence simple (resp. uniforme) »
- « la fonction f est limite simple (resp. uniforme) de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur I »

Définition 7.1.3 (norme de la convergence uniforme, pour les fonctions bornées sur I)
On note $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.
C'est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ de toutes les fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
Pour tout élément f de $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$.
On définit ainsi une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$, dite *norme de la convergence uniforme.*

On dit aussi « norme indice infini » ou « norme infinie » (mais c'est plutôt du style parlé).

Rappelons en quoi l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une *norme* sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$:

Pour tous (f,g) de $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$, et pour tout λ de $\mathbb{K}$: $\begin{cases} \|f\|_\infty \geqslant 0, \quad \text{avec} \quad \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \\ \|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty \\ \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ \textit{(inégalité triangulaire)} \end{cases}$

- Les propriétés $\|f\|_\infty \geqslant 0$, et ($\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$) sont évidentes.
- Soit f dans $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$, et $M = \|f\|_\infty$.
  Pour tout x de I, on $|\lambda f(x)| \leqslant |\lambda|\, M$, donc λf est dans $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ et $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda|\, \|f\|_\infty$.
  Il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_n)| = M$.
  On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |(\lambda f)(x_n)| = |\lambda|\, M$, et il en résulte $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty$.
- Soit f et g dans $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$. Pour tout x de I, on a $|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
  Ainsi $f+g$ est dans $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ et $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

Par une généralisation facile de qui a été vu dans le cas des espaces vectoriels normés de dimension finie (mais on note bien que $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ *n'est pas* de dimension finie) l'existence de cette norme permet de définir les notions suivantes : distance, ensembles ouverts ou fermés, adhérence, limites, etc.

On peut réécrire la définition 7.1.2 en invoquant la norme de la convergence uniforme :

Définition 7.1.4 (convergence uniforme exprimée à l'aide de la norme $\| \ \|_\infty$)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est *uniformément convergente* sur I s'il existe $f : I \to \mathbb{K}$ telle que :
- les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang)
- la suite $f_n - f$ converge vers la fonction nulle, au sens de la norme $\| \ \|_\infty$.

La dernière propriété s'énonce plus simplement par : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Si les fonctions f_n et f sont elles-mêmes bornées sur I, on peut traduire cette propriété par :
« la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans l'espace $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme ».

Proposition 7.1.1 (la convergence uniforme entraîne la convergence simple)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est uniformément convergente sur I vers une fonction f, alors elle est simplement convergente sur I vers cette même fonction f.

On suppose que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément, sur I, vers une fonction f.

Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que les fonctions $f - f_n$ soient bornées sur I pour tout $n \geqslant n_0$.

On a alors : $\forall\, x \in I, \forall\, n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty$.

Pour tout x de I, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est simplement convergente sur I vers la fonction f. □

La réciproque est fausse comme le montre la suite des fonctions $x \mapsto x^n$ sur l'intervalle $[0, 1[$.

Exercice 7.1 (⇝ **corrigé**)
Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie sur $I = [0, 1]$ par : $f_n(x) = x^n$.

Remarques

– Pour prouver la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$, on commence en général par prouver la convergence simple, ce qui permet d'identifier une fonction limite f.
  On examine ensuite si la convergence est uniforme sur I, en cherchant à majorer $|f_n(x) - f(x)|$, indépendamment de x, par une suite positive convergeant vers 0.

– Pour prouver au contraire que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur I vers f, il suffit d'exhiber une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de I telle que la suite $n \mapsto f_n(x_n) - f(x_n)$ ne converge pas vers 0.

– Si la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement (resp. uniformément) sur I, il en est de même sur tout sous-intervalle J de I. Étudier la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$, c'est préciser sur quel sous-intervalle « maximal » de I on a la « meilleure » convergence (et *uniforme* c'est mieux que *simple*).

– Avec la notation $\|f - f_n\|_\infty$, il est indispensable de préciser sur quel intervalle on travaille.
  En cas de doute, la notation $\sup\limits_{x\in J} |f(x) - f_n(x)|$ est plus précise, donc plus sûre.

– En l'absence de convergence uniforme sur l'intervalle I, on verra qu'il est parfois possible de se « contenter » de la convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de I.

Exercice 7.2 (⇝ **corrigé**)
On considère la suite (f_n) d'applications définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + x^n)}$.
Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Conclusion ?

▷ Convergence uniforme sur tout compact

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On sait que la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f sur I n'implique pas nécessairement la convergence uniforme vers cette même fonction f.

Il arrive souvent, notamment quand l'intervalle I n'est pas borné, qu'on puisse identifier des sous-intervalles de I sur lesquels la convergence est uniforme.

On parle de « convergence uniforme sur tout segment » si, pour chaque sous-segment $[a, b]$ de I, la suite des restrictions des f_n à $[a, b]$ est uniformément convergente (cela n'a d'intérêt que si I n'est pas lui-même un segment). La convergence uniforme sur tout segment de I implique bien sûr la convergence simple sur I, mais elle n'implique pas la convergence uniforme sur I (voir exemple ci-dessous).

Exercice 7.3 (⇝ **corrigé**)
Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur $I=\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\cos\Big(\dfrac{nx}{n+1}\Big)$.

Exercice 7.4 (⇝ **corrigé**)
Étudier la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ où : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in\mathbb{R}^+,\ f_n(x)=n^k x^2 \mathrm{e}^{-nx}$ (k un réel donné).

7.2 Modes de convergence d'une série de fonctions

Définition 7.2.1 (sommes partielles d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les fonctions $S_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n$ sont appelées *sommes partielles* de la série de fonctions $\sum f_n$.

Définition 7.2.2 (convergence simple, sur un intervalle, d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ est *simplement convergente* sur I si, pour tout x de I, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si on pose $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout x de I, on dit que l'application $S : I\to\mathbb{K}$ est la somme, sur l'intervalle I, de la série de fonctions $\sum f_n$.

▷ Définition équivalente, en termes de sommes partielles

Dire que la *série* de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, c'est dire que la *suite* des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I. On a alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ pour tout x de I.

▷ Fonction « reste d'ordre N » d'une série de fonctions simplement convergente

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions simplement convergente sur I.

Soit S la somme de cette série, et soit S_N sa somme partielle d'ordre N.

On appelle *reste d'ordre* N de cette série, la fonction $R_N=S-S_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n-\sum_{n=0}^{N} f_n=\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n$.

La suite $(R_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle. Mais attention : on ne peut parler des restes partiels R_n que si on sait *déjà* que la série $\sum f_n$ converge.

Définition 7.2.3 (convergence uniforme, sur un intervalle, d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ est *uniformément convergente* sur I si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de ses sommes partielles est uniformément convergente sur I.

On a alors bien sûr la convergence simple de la série $\sum f_n$ vers la fonction somme $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

▷ Reste d'ordre N d'une série de fonctions uniformément convergente

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions, simplement convergente sur I.

On peut donc évoquer la suite $(R_n)_{n\geqslant 0}$ des restes d'ordre n de cette série de fonctions.

Dire que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I, c'est dire que la suite $(R_n)_{n\geqslant 0}$ des restes d'ordre n converge uniformément, sur l'intervalle I, vers la fonction nulle.

Cela équivaut à dire : $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\,n \geqslant n_0,\ \|R_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Ou encore, en détaillant un peu : $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\,n \geqslant n_0,\ \forall\,x \in I,\ \left|\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

On a en effet les équivalences, en notant $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme au sens de la convergence simple :

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I

$\Leftrightarrow$ la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ des sommes partielles est uniformément convergente vers S sur I

$\Leftrightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall\,n \geqslant n_0,\ \|S - S_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ □

$\Leftrightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall\,n \geqslant n_0,\ \|R_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ la suite $(R_n)_{n\geqslant 0}$ des restes de la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

▷ Conditions nécessaires de convergence

Si la *série* $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur I, alors la *suite* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement (resp. uniformément) sur I vers la fonction nulle. La réciproque est fausse.

– On suppose que $\sum f_n$ est simplement convergente sur I.

  Pour tout x de I, la *série* numérique $\sum f_n(x)$ est donc convergente.

  Il en résulte que, pour tout x de I, la *suite* $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 dans $\mathbb{K}$ (cf proposition 6.1.2).

  En d'autres termes, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est simplement convergente, sur I, vers la fonction nulle.

– On suppose que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I.

  La suite $(R_n)_{n\geqslant 0}$ des restes d'ordre n converge donc uniformément sur I vers la fonction nulle.

  Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall\,n \geqslant n_0,\ \|R_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

  Du fait que $f_n = R_{n-1} - R_n$, on en déduit, pour tout $n > n_0$, $\|f_n\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.

  En d'autres termes, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est uniformément convergente, sur I, vers la fonction nulle. □

Cette remarque peut-être utilisée pour observer qu'une série de fonctions est « grossièrement » non simplement (resp. non uniformément) convergente sur I.

Définition 7.2.4 (convergence normale, sur un intervalle, d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ est *normalement convergente* sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I et si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Proposition 7.2.1 (la convergence normale entraîne la convergence uniforme)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I, alors elle est uniformément convergente sur I.

On suppose que la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.
Pour tout x de I, et tout n de $\mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$.
Par comparaison et pour tout x de I, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge.
La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur I, ce qui permet d'évoquer $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
On se donne ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par hypothèse, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, pour $m > n \geqslant n_0$: $\forall x \in I,\ \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Donc, quand $m \to +\infty$: $\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Conclusion : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|R_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Ce résultat n'est autre que la traduction de la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur I. $\square$

Remarques

– La réciproque de la propriété précédente est fausse (la convergence uniforme d'une série de fonctions n'implique pas sa convergence normale).
– De nombreux résultats (à venir) de ce chapitre sont valables sous des hypothèses de convergence uniforme. Comme ce mode de convergence n'est pas le plus facile à établir, il pourra être commode de « passer » par la convergence normale (si elle est réalisée, bien sûr !).
– Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, il suffit d'exhiber une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ « majorante » c'est-à-dire telle que $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ pour tout n.

Exercice 7.5 (la série géométrique, $\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Étudier le mode de convergence de la série géométrique $\sum x^n$.

Exercice 7.6 (la fonction ζ (zeta) de Riemann, $\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Étudier le domaine et le mode de convergence de la série de fonctions $x \mapsto \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Exercice 7.7 (une série de fonctions CVU mais pas CVN, $\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Étudier le mode de convergence de la série $\sum f_n$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

7.3 Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Proposition 7.3.1 (continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f.
Alors la fonction f est elle-même continue sur l'intervalle I.

Soit x_0 un élément de I, et soit ε un réel strictement positif quelconque.
On sait qu'il existe un entier n_0 tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$ (et en particulier pour $n = n_0$).
Ainsi, pour tout x de I, on a $|f(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon$.
La fonction f_{n_0} est continue en x_0, donc il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall\, x \in I \cap [x_0-\delta, x_0+\delta],\ |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon$.
Pour tout x de $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, on a alors :

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)) + (f_{n_0}(x_0) - f(x_0))| \\ &\leqslant \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\leqslant \varepsilon} \leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

Résumons : $\forall\, x_0 \in I,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I, (|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|) \leqslant 3\varepsilon$.
Autrement dit, la fonction f est continue en tout point x_0 de I. □

On peut utiliser cette propriété pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme : si la suite de fonctions continues (f_n) converge simplement vers f sur I, mais si f n'est pas continue sur I (ne serait-ce qu'en un point), alors il n'y a pas convergence uniforme.

Exemple très simple (voir exercice 7.1) : sur le segment $[0, 1]$, la suite de fonctions continues $x \mapsto x^n$ est simplement convergente vers g définie par $g(x) = 0$ sur $[0, 1[$ et $g(1) = 1$. La fonction g n'étant pas continue en 1, la convergence de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 7.8 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Étudier le mode de convergence sur $\mathbb{R}^+$ de la suite des fonctions $x \mapsto f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$.

▷ Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I

On dit qu'une suite $f_n \colon I \to \mathbb{K}$ est uniformément convergente sur tout segment de I si, pour tous a, b de I la suite des restrictions des f_n au segment $[a, b]$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.
Avec cette définition, et dans le cas où l'intervalle I n'est pas lui-même un segment, le résultat de la proposition 7.3.1 est encore valable si on remplace l'hypothèse « convergence uniforme sur I » par l'hypothèse plus faible « convergence uniforme sur tout segment de I ».

C'est une conséquence du « caractère local » de la continuité. Pour établir la continuité de f en x_0, il suffit en effet de vérifier la continuité en x_0 de la restriction de f à $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, avec un certain $\delta > 0$.
On est ainsi ramené à la proposition 7.3.1, ce qui permet de conclure. □

Proposition 7.3.2 (théorème de la double limite, pour les suites de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit a une extrémité de l'intervalle I (éventuellement $a = -\infty$ ou $a = +\infty$).

On suppose que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f.
On suppose également que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n possède une limite finie ℓ_n au point a.
Dans ces conditions :
- *la suite numérique (ℓ_n) admet une limite ℓ'*
- *la fonction f admet une limite au point a, et cette limite est égale à ℓ'*

Si on cite les hypothèses avec précision, le résultat se résume à : $\lim\limits_{x\to a}\Big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\Big)$

NB : la démonstration de ce résultat est hors-programme.

On suppose que l'extrémité a de I n'appartient pas à I (sinon les hypothèses se réduisent à la continuité des fonctions f_n en a, et il suffit d'appliquer la proposition 7.3.1).

Pour fixer les idées, et parce qu'on ne peut pas traiter tous les cas particuliers, on suppose $a = +\infty$.

Pour la suite de cette démonstration, on fixe un réel strictement positif ε.

- Il existe n_1 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ \forall x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ (c'est la convergence uniforme).
  En particulier : $\forall n \geqslant n_1,\ \forall m \geqslant n_1,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant 2\varepsilon$.
  Quand $x \to a$ dans ce résultat, on obtient : $\forall n \geqslant n_1,\ \forall m \geqslant n_1,\ |\ell_n - \ell_m| \leqslant 2\varepsilon$ $(\star)$.
- En particulier : $\forall n \geqslant n_1,\ |\ell_n - \ell_{n_1}| \leqslant 2\varepsilon$ donc $|\ell_n| \leqslant |\ell_{n_1}| + 2\varepsilon$: la suite $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
  On en extrait une suite convergente $(\ell_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
  Posons $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_{\varphi(n)}$. Il existe donc n_2 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2,\ \left|\ell' - \ell_{\varphi(n)}\right| \leqslant \varepsilon$.
  Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour $n \geqslant n_0$, on a la majoration : $|\ell' - \ell_n| \leqslant \underbrace{\left|\ell' - \ell_{\varphi(n)}\right|}_{\leqslant\varepsilon \text{ car } n\geqslant n_2} + \underbrace{\left|\ell_{\varphi(n)} - \ell_n\right|}_{\leqslant 2\varepsilon \text{ car } \varphi(n)\geqslant n\geqslant n_1} \leqslant 3\varepsilon$.
  Ainsi, c'est toute la suite $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$ qui est convergente vers ℓ'.
- D'après ce qui précède : $\forall x \in I,\ |f(x) - \ell'| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\leqslant\varepsilon \text{ car } n_0\geqslant n_1} + |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| + \underbrace{|\ell_{n_0} - \ell'|}_{\leqslant 3\varepsilon}$.
  Or il existe M tel que : $\forall x \geqslant M, |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| \leqslant \varepsilon$ (rappelons qu'on a fixé $a = +\infty$).
  Ainsi, pour tout $x \geqslant M$, on a $|f(x) - \ell'| \leqslant 5\varepsilon$.
- Résumons : pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un réel M tel que $x \geqslant M \Rightarrow |f(x) - \ell'| \leqslant 5\varepsilon$.
  On a donc obtenu : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell'$, puis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ (CQNFPD). $\square$

Proposition 7.3.3 (interversion limite-intégrale, pour les suites de fonctions continues)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f (donc f est continue sur $[a,b]$).
Alors la suite $n \mapsto \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Si on cite les hypothèses avec précision, le résultat se résume à : $\int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [a,b],\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ (convergence uniforme).

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\varepsilon$.

Il en résulte : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : on a utilisé $a\leqslant b$, mais le résultat subsiste si $b\leqslant a$. □

Par contraposition, le résultat précédent peut aider à montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice 7.9 (⇝ **corrigé**)
Étudier le mode de convergence sur $[0,1]$ de la suite des fonctions $x\mapsto f_n(x)=n^2x^n(1-x)$.

Proposition 7.3.4 (dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

a) on suppose que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est simplement convergente, sur I, vers une fonction f.

b) on suppose également que la suite $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction h.

Dans ces conditions :
- *la convergence de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f est uniforme sur tout segment de I.*
- *la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a l'égalité $f'=h$.*

Si on cite les hypothèses avec précision, le résultat se résume à : $\Bigl(\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n\Bigr)'=\lim_{n\to+\infty} f'_n$.

- La fonction h, par CVU de la suite des fonctions continues $(f'_n)_{n\geqslant 0}$, est continue sur I (cf prop. 7.3.1).

  On se donne un point a de I. Pour l'instant, on fixe également x dans I.

  Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t\quad(\star)$ (car f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I).

  La suite des fonctions continues f'_n converge uniformément vers h, sur I donc sur $[a,x]$.

  On applique la proposition 7.3.3, et on écrit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

  Ainsi, quand $n\to+\infty$ dans $(\star)$, on obtient : $\displaystyle f(x)=f(a)+\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t\quad(\star\star)$.

  Mais cette égalité est en fait vraie pour tout x de I.

  Puisque h est continue, elle exprime que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que : $\forall x\in I,\ f'(x)=h(x)$.

- Il nous reste à prouver que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f uniformément sur tout segment de I.

  Comme dans la première partie de la preuve, on utilise le point a, fixé dans I.

  Pour la variable x, on se place donc sur un segment J de I.

  On note que lorsque x parcourt J, la distance $|x-a|$ est majorée par un certain réel d.

  De même, quand x parcourt J, le segment variable $[a,x]$ reste inclus dans un certain segment K de I.

  Par différence de $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve : $\displaystyle\forall x\in J,\ |f(x)-f_n(x)|\leqslant|f(a)-f_n(a)|+\left|\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t\right|$

  Mais $\displaystyle\left|\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant|x-a|\sup_{t\in[a,x]}|h(t)-f'_n(t)|\leqslant d\sup_{t\in K}|h(t)-f'_n(t)|$.

  Ainsi $\displaystyle\sup_{x\in J}|f(x)-f_n(x)|\leqslant|f(a)-f_n(a)|+d\sup_{t\in K}|h(t)-f'_n(t)|$.

  Le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $n\to+\infty$, *indépendamment de x*.

  Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in J}|f(x)-f_n(x)|=0$.

  On a donc prouvé la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f sur tout segment J de I. □

Proposition 7.3.5 (une version plus forte de la proposition 7.3.4)
On va ici affaiblir l'hypothèse (a) de la proposition 7.3.4, et constater que le résultat tient toujours.

On suppose seulement qu'il existe a dans I tel que la suite numérique $(f_n(a))_{n\geqslant 0}$ soit convergente (mais on garde l'hypothèse de convergence uniforme de la suite $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ vers h).

Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est simplement convergente sur I vers une fonction f (ce qui ramène aux hypothèses, donc à la conclusion, de la proposition 7.3.4).

On se donne donc a dans I tel que la suite $(f_n(a))_{n\geqslant 0}$ soit convergente. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a)$.
Si on reprend la démonstration de la proposition 7.3.4, on a toujours : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = f_n(a) + \displaystyle\int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t$.

On en déduit : $\forall\, x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, où f est définie par : $f(x) = \ell + \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

On a donc prouvé la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur I, et c'est fini. □

▷ Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I

Si I n'est pas lui-même un segment, le résultat « f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$ » est encore valable si on remplace l'hypothèse « la suite $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers h sur I » par l'hypothèse plus faible « la suite $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers h sur tout segment de I ».

Si on applique la proposition 7.3.4 à un segment quelconque J de I, on voit que (sur ce segment) f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f' = h$. Comme cela est vrai sur tout segment J de I, c'est vrai sur I tout entier. □

Proposition 7.3.6 (caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que, pour tout j de $[\![0, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})_{n\geqslant 0}$ est simplement convergente sur I.

On note en particulier f la limite de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

On suppose enfin que la suite $(f_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$ est uniformément convergente, sur I, vers une fonction h.

Dans ces conditions :

- *la convergence de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f est uniforme sur tout segment de I.*
- *la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a l'égalité $f^{(k)} = h$.*

Si on cite les hypothèses avec précision, le résultat se résume à : $\Big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\Big)^{(k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$.

Cette démonstration devrait être admise, mais bon, la voici...

On procède par récurrence sur l'entier $k \geqslant 1$. Pour $k = 1$, c'est fait : il s'agit de la proposition 7.3.4.
Soit $k \geqslant 2$. On suppose que la propriété est vraie au rang $k-1$.

On se donne une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 7.3.6 « au rang k ».

En particulier, soit h la limite uniforme, sur I, de la suite $(f_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$.

La suite $(g_n = f'_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait aux mêmes hypothèses, mais « au rang $k-1$ ».

Soit g la limite (au sens de la convergence simple, sur I) de la suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$.

Puisque nous avons supposé que la propriété au rang $k-1$ est vraie, on a les résultats suivants :

- la convergence de la suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$ vers g est uniforme sur tout segment de I.
- la fonction h, limite uniforme sur I de $(g_n^{(k-1)})_{n\geqslant 0}$, est $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I et on a l'égalité $h^{(k-1)} = g$.

On peut maintenant appliquer la proposition 7.3.4 à la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$: en effet la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est CVS vers f sur I, et la suite $(g_n = f'_n)_{n\geqslant 0}$ est CVU vers g sur I (plus exactement sur tout segment de I, mais on sait que ça ne fait pas de différence).

On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que $g' = f$. Finalement h est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $h^{(k)} = g' = f$. Ceci prouve la propriété au rang k et achève la récurrence. □

▷ **Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I**

Si I n'est pas lui-même un segment, le résultat « f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $f^{(k)} = h$ » est encore valable si on remplace l'hypothèse « la suite $(f_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers h sur I » par l'hypothèse plus faible « la suite $(f_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers h sur tout segment de I ».

Avec ces hypothèses affaiblies, on peut encore appliquer la proposition 7.3.6 sur tout segment J de I. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^k$, avec $f^{(k)} = h$ sur tout segment J de I, donc sur I tout entier. □

7.4 Régularité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 7.4.1 (continuité de la somme d'une série CVU de fonctions continues)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I.
Alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est elle-même continue sur l'intervalle I.

Il suffit d'appliquer la proposition 7.3.1 à la suite des sommes partielles $x \mapsto S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n(x)$.

En effet, tout comme les fonctions f_n, les fonctions S_N sont continues sur I.

Dire que $\sum f_n$ converge uniformément sur I, c'est dire que $(S_N)_{N\geqslant 0}$ converge uniformément sur I.

Dans ces conditions, la fonction $S = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$, c'est-à-dire la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, est continue sur I. □

▷ **Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I**

On dit que la série $\sum f_n$ est *uniformément convergente sur tout segment de I* si, pour tous a, b de I la série des restrictions des f_n à $[a, b]$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.
Avec cette définition, et dans le cas où l'intervalle I n'est pas lui-même un segment, le résultat de la proposition précédente est encore valable si on remplace l'hypothèse de « convergence uniforme sur I » par l'hypothèse plus faible de « convergence uniforme sur tout segment de I ».

C'est une conséquence du « caractère local » de la continuité. Pour la continuité de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en x_0, il suffit de considérer la restriction des f_n et de S à $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, avec $\delta > 0$.

On est ainsi ramené à la proposition 7.4.1, ce qui permet de conclure. □

Exercice 7.10 (une série de fonctions, ⇝ **corrigé**)

a) Étudier le domaine et la continuité de $S\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, où : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^{2n}+1}$.

b) Préciser la monotonie de la fonction S. Comparer $S(x)$ et $S\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$.

c) Calculer la limite de S quand $x \to 1^-$, puis quand $x \to 1^+$, puis quand $x \to +\infty$.

Proposition 7.4.2 (théorème de la double limite, pour les séries de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit a une extrémité de l'intervalle I (éventuellement $a=-\infty$ ou $a=+\infty$).
On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I. On note S la somme de cette série.
On suppose également que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n possède une limite finie ℓ_n au point a.
Dans ces conditions, la série numérique $\sum \ell_n$ converge et on a $\lim\limits_{x\to a} S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n$.

Si on cite les hypothèses avec précision, le résultat se résume à : $\lim\limits_{x\to a}\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\Big)$

Il suffit d'appliquer la proposition 7.3.2 à la suite des sommes partielles $x\mapsto S_N(x)=\sum\limits_{n=0}^{N} f_n(x)$.
Par hypothèse, la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$ converge uniformément vers S sur l'intervalle I.
D'autre part, pour tout N de $\mathbb{N}$, la fonction S_N tend vers $\sigma_N=\sum\limits_{n=0}^{N}\ell_n$ quand x tend vers a.
En appliquant la proposition 7.3.2, on voit que :
- La suite $(\sigma_N)_{N\geqslant 0}$ possède une limite finie σ. Donc la série $\sum \ell_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n=\sigma$.
- La fonction $S=\lim\limits_{N\to+\infty} S_N=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ tend vers σ quand x tend vers a. □

Exercice 7.11 (fonctions « zeta » et « zeta alternée », ⇝ **corrigé**)
On pose $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$ et $\widehat{\zeta}(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$. Pour la fonction ζ, on pourra se reporter à l'exercice 7.6.

a) Préciser le domaine de définition et de continuité de la fonction ζ.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$.

c) Préciser le domaine de définition et de continuité de la fonction $\widehat{\zeta}$.

d) Prouver que : $\forall x>1,\ \widehat{\zeta}(x)=(2^{1-x}-1)\zeta(x)$. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x\to 1^+$.

Proposition 7.4.3 (intégration terme à terme, pour les séries de fonctions continues)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
Dans ces conditions, la série de terme général $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Il suffit d'appliquer la proposition 7.3.3 à la suite des sommes partielles $x\mapsto S_N(x)=\sum\limits_{n=0}^{N} f_n(x)$.
Pour tout N de $\mathbb{N}$, on a bien sûr $\int_a^b S_N(t)\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{N}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
La suite de fonctions continues $(S_N)_{N\geqslant 0}$ converge uniformément vers $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $[a,b]$.
Ainsi la suite $N\mapsto\int_a^b S_N(t)\,\mathrm{d}t$ converge et : $\lim\limits_{N\to\infty}\int_a^b S_N(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$.

En d'autres termes, la série $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$. □

Exercice 7.12 (⇝ **corrigé**)

Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Proposition 7.4.4 (dérivabilité de la somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur I.

On suppose également que la série $\sum f_n'$ est uniformément convergente sur I.

Alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a l'égalité $\displaystyle\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Bigr)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Il suffit d'appliquer la proposition 7.3.4 à la suite des sommes partielles $x \mapsto S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

- La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est simplement convergente sur I vers la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Chaque fonction S_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie $S_n' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k'$.
- La suite $(S_n')_{n\geqslant 0}$ est uniformément convergente sur I vers une fonction H, donc ici : $H = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

La proposition 7.3.4 dit alors que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que $S' = H$.

En d'autres termes, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a l'égalité $\displaystyle\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Bigr)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$. □

Exercice 7.13 (une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, ⇝ **corrigé**)

Étudier le domaine, le caractère $\mathcal{C}^1$, et les variations de $S\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$.

▷ Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I

Si I n'est pas lui-même un segment, le résultat « $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\bigl(\sum f_n\bigr)' = \sum f_n'$ » est encore valable si on remplace l'hypothèse « la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I » par l'hypothèse plus faible « la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I ».

Si on applique 7.4.4 sur un segment J de I, on voit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur J et que $\displaystyle\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Bigr)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Comme cela est vrai sur tout segment J de I, c'est vrai sur I tout entier. □

Proposition 7.4.5 (caractère $\mathcal{C}^k$ de la somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que, pour tout j de $[\![0, k-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(j)}$ est simplement convergente sur I.

On suppose enfin que la série $\sum f_n^{(k)}$ est uniformément convergente sur I.

Alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a l'égalité $\displaystyle\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Bigr)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Il suffit d'appliquer la proposition 7.3.6 à la suite des sommes partielles $x \mapsto S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_k(x)$.

– Chaque S_N est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et vérifie : $\forall j \in [\![0, k]\!],\ S_N^{(j)} = \sum_{n=0}^{N} f_n^{(j)}$.

– Pour tout j de $[\![0, k-1]\!]$, la suite $(S_N^{(j)})_{N \geqslant 0}$ est simplement convergente sur I.

La suite $(S_N)_{N \geqslant 0}$ converge donc simplement sur I vers une fonction S. Ici $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

– La suite $(S_N^{(k)})_{n \geqslant 0}$ est uniformément convergente sur I vers une fonction H. Ici $H = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

La proposition 7.3.6 dit alors que S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et que $S^{(k)} = H$.

En d'autres termes, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a l'égalité $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$. □

▷ Adaptation au cas où la convergence de $\sum f_n^{(k)}$ est uniforme sur tout segment

Si l'intervalle I n'est pas lui-même un segment, le résultat reste valable si on remplace l'hypothèse de convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ par l'hypothèse plus faible de convergence uniforme sur tout segment.

Avec ces hypothèses affaiblies, on peut encore appliquer la proposition 7.4.5 sur tout segment J de I.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ sur tout segment J de I, donc sur I tout entier. □

Exercice 7.14 (la fonction ζ est $\mathcal{C}^\infty$, ⇝ **corrigé**)

Montrer que $\zeta \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 1 :\ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$.