Chapitre 8

Séries entières

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

8.1 Rayon de convergence

8.1.1 Rayon de convergence d'une série entière

Proposition 8.1.1 (lemme d'Abel)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes.
Soit z_0 un nombre complexe non nul. On suppose que la suite $(a_n z_0^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
Alors la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

Soit z_0 dans $\mathbb{C}^*$ et M dans $\mathbb{R}^+$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n z_0^n| \leqslant M$. Soit z dans $\mathbb{C}$, tel que $|z| < |z_0|$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M\left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$ (terme général d'une série géométrique convergente).

Ainsi la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente, ce qu'il fallait démontrer. □

Définition 8.1.1 (rayon de convergence d'une série entière)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes.
L'ensemble I des ρ de $\mathbb{R}^+$ tels que $(a_n \rho^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée est un intervalle contenant 0.
La borne supérieure R de I dans $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n\, z^n$.

Le fait que I contienne 0 est trivial. Ensuite si ρ est dans I, donc si $(a_n \rho^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (par M), alors pour tout λ de $[0, \rho]$ la suite $(a_n \lambda^n)_{n\geqslant 0}$ est également bornée (par M), donc $[0, \rho]$ est inclus dans I. □

Proposition 8.1.2 (trois définitions équivalentes pour le rayon de convergence)
Les propositions suivantes définissent toutes le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$:

a) R est la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'intervalle $I_a = \{\rho \geqslant 0$, la suite $(a_n \rho^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée$\}$

b) R est la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'intervalle $I_b = \{\rho \geqslant 0$, la suite $(a_n \rho^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $0\}$

c) R est la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'intervalle $I_c = \{\rho \geqslant 0, \sum a_n \rho^n$ est absolument convergente$\}$

Les ensembles I_a, I_b, I_c sont effectivement des intervalles qui contiennent 0.

Bien sûr la proposition (a) est la définition initiale du rayon de convergence.

On a $I_c \subset I_b \subset I_a$, donc $\sup(I_c) \leqslant \sup(I_b) \leqslant \sup(I_a)$. Si $\sup(I_a) = 0$, les trois valent 0.

On suppose donc $\sup(I_a) > 0$, et on se donne $\rho < \sup(I_a)$.

D'après le lemme D'Abel (prop. 8.1.1), la série $\sum a_n \rho^n$ est absolument convergente, donc $\rho \in I_c$.

Ainsi $[0, \sup(I_a)[\subset [0, \sup(I_c)]$ donc $\sup(I_a) \leqslant \sup(I_c)$.

Dans tous les cas, on a donc : $\sup(I_c) = \sup(I_b) = \sup(I_a)$.

Remarque : les trois intervalles I_a, I_b, I_c sont donc égaux à $[0, R[$ ou à $[0, R]$ (ce dernier cas n'étant possible que si $R < +\infty$ bien sûr), et on retiendra les inclusions $I_c \subset I_b \subset I_a$ (la seule différence pouvant se faire au niveau de l'appartenance ou non de la valeur R). □

▷ Premiers exemples

– Le rayon de convergence de $\sum n!\, z^n$ est $R = 0$.

– Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est $R = 1$.

– Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$.

- Posons $u_n = n!\rho^n$. Pour tout $\rho > 0$, et pour $n \geqslant \dfrac{2}{\rho}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\rho \geqslant 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite $n!\rho^n$ n'est donc bornée que si $\rho = 0$.
- Pour tout $\rho \geqslant 0$, la suite $n \mapsto \rho^n$ est bornée si et seulement si $\rho \leqslant 1$.
- Pour tout $\rho \geqslant 0$, la suite $n \mapsto \dfrac{\rho^n}{n!}$ tend vers 0 donc est bornée. □

Définition 8.1.2 (disque ouvert et intervalle ouvert de convergence d'une série entière)
Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
L'ensemble $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ est appelé *disque ouvert de convergence* de la série entière $\sum a_n\, z^n$.
L'ensemble $]-R, R\,[$ est appelé *intervalle ouvert de convergence* de la série entière $\sum a_n\, z^n$.

Proposition 8.1.3 (mode de convergence sur le disque ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
– *La série $\sum a_n z^n$ converge absolument sur le disque ouvert $|z| < R$, et en particulier sur $]-R, R[$.*
– *La série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > R$.*

On se donne z_0 dans $\mathbb{C}$.
– Si $\rho = |z_0| < R$, alors ρ est dans l'intervalle I_c, au sens de la partie (c) de la proposition 8.1.2.
Autrement dit, la série $\sum a_n z_0^n$ est absolument convergente.
– Si $\rho = |z_0| > R$, alors ρ n'est pas dans l'intervalle I_b, au sens de la partie (b) de la proposition 8.1.2.
Autrement dit, la série $\sum a_n z_0^n$ est grossièrement divergente. □

▷ Fonction somme d'une série entière

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

On peut donc en définir la somme $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout z tel que $|z| < R$..

Attention : c'est une fonction d'une variable *complexe*, alors que le cours sur les séries de fonctions (chapitre 7) ne s'applique qu'aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On ne pourra donc utiliser les notions et les résultats du chapitre 7 qu'à la condition de se restreindre à l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Dans ce cas, on parlera de la « série entière d'une variable réelle » : $x \mapsto S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

▷ **Remarques**

– Si le rayon de convergence R est nul, le disque et l'intervalle ouvert de convergence sont vides !
Quelque soit le rayon de convergence, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge en $z = 0$ et la somme est a_0.
Une série entière $\sum a_n\, z^n$ de rayon de convergence $R = 0$ ne converge qu'en $z = 0$ (intérêt limité).

– On ne change pas le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ en modifiant un nombre fini de coefficients a_n.

> Évident car cela ne change pas le caractère borné ou non de la suite $(a_n \rho^n)_{n\geqslant 0}$. □

– Les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum (-1)^n a_n z^n$ ou $\sum |a_n|\, z^n$ ont le même rayon de convergence.

> Évident car $a_n \rho^n$, $(-1)^n a_n \rho^n$ et $|a_n|\, \rho^n$ ont le même module. □

– Pour déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, on peut se limiter à $n \geqslant n_0$.
De même, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+k}$ (c'est-à-dire $\sum_{n\geqslant k} a_{n-k} z^n$) ont le même rayon de convergence.

▷ **Comportement sur le bord du disque de convergence**

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Si $|z_0| = R$, on ne peut rien dire a priori de la série $\sum a_n z_0^n$ et on doit faire une étude spécifique.

Par exemple :

– le rayon de convergence de $\sum z^n$ est 1, et il y a divergence (grossière) en tout point du cercle unité.

– le rayon de convergence de $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est 1, mais il y a divergence en $z = 1$ et convergence en $z = -1$.

– pour $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$, le rayon de convergence est 1 et il y a convergence en tout point du cercle unité.

Remarque : si la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors le rayon de $\sum a_n z^n$ est au moins égal à 1.

Exercice 8.1 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Préciser le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$, où a_n est la n-ième décimale de π.

Exercice 8.2 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Préciser le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} a_n z^n$, avec $a_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$.

8.1.2 Comparaisons ou calculs de rayons de convergence

Proposition 8.1.4 (comparaisons ou calculs de rayons de convergence)
Soit R_a le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$, et soit R_b celui de $\sum b_n\, z^n$.
Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ (c'est-à-dire : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \exists\, \lambda > 0, \forall\, n \geqslant n_0,\ |a_n| \leqslant \lambda\, |b_n|$), alors $R_a \geqslant R_b$.
Si $|a_n| \sim |b_n|$ (c'est-à-dire : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ \big||a_n| - |b_n|\big| \leqslant \varepsilon\, |b_n|$), alors $R_a = R_b$.

– On suppose $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, c'est-à-dire : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \exists\, \lambda > 0, \forall\, n \geqslant n_0,\ |a_n| \leqslant \lambda\,|b_n|$.
Soit ρ dans $\mathbb{R}^+$. Si la suite $(b_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (par M), alors la suite $(a_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (par λM).
Ainsi $\{\rho \in \mathbb{R}^+, (b_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ bornée$\}$ est inclus dans $\{\rho \in \mathbb{R}^+, (a_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ bornée$\}$.
Finalement $R_b = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+, (b_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ bornée$\} \leqslant R_a = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+, (a_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ bornée$\}$.

– On suppose $|a_n| \sim |b_n|$. En particulier, il existe un entier n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \big||a_n| - |b_n|\big| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|b_n|$
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\dfrac{1}{2}\,|b_n| \leqslant |a_n| \leqslant \dfrac{3}{2}\,|b_n|$, c'est-à-dire $|b_n| \leqslant 2\,|a_n|$ et $|a_n| \leqslant \dfrac{3}{2}\,|b_n|$.
Ainsi $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ (donc $R_b \leqslant R_a$) et $b_n = \mathrm{O}(a_n)$ (donc $R_a \leqslant R_b$), et finalement $R_a = R_b$. □

Remarques

– on retiendra en particulier que si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (pour $n \geqslant n_0$), alors $R_a \geqslant R_b$;
– si $|a_n| \sim |b_n|$, alors les séries $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ ont le même rayon de convergence ;
– plus généralement, s'il existe λ, μ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\lambda\,|b_n| \leqslant |a_n| \leqslant \mu\,|b_n|$ pour $n \geqslant n_0$, alors $R_a = R_b$.

Proposition 8.1.5 (les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{K}$.
Alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

On va en fait démontrer un résultat plus fort :

Proposition 8.1.6 (si f est une fraction rationnelle non nulle, $\sum a_n z^n$ et $\sum f(n) a_n z^n$ ont même rayon)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{K}$, et soit $n \mapsto f(n)$ une fonction rationnelle non nulle.
Alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum f(n) a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Remarque : on se place bien sûr au-delà d'un entier n_0 tel que $f(n)$ ait un sens pour $n \geqslant n_0$.
Posons $b_n = f(n) a_n$ et soit R_a et R_b les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n\, z^n$.

– On va supposer $R_a > 0$, et montrer qu'alors $R_a \leqslant R_b$. On se donne $0 \leqslant r < R_a$.
Par définition de R_a, il existe ρ dans $]r, R_a[$ et M dans $\mathbb{R}^+$ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |a_n|\,\rho^n \leqslant M$.
On a alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |f(n)a_n|\, r^n \leqslant |a_n|\,\rho^n\ |f(n)| \Big(\dfrac{r}{\rho}\Big)^n \leqslant M u_n$, où on a posé $u_n = |f(n)| \Big(\dfrac{r}{\rho}\Big)^n$.
Il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ et q dans $\mathbb{Z}$ tels que $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda n^q$ (quotient des termes de plus haut degré).
Ainsi $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{r}{\rho} < 1$, donc $\sum u_n$ converge (règle de d'Alembert : prop. 6.2.6).
Il en résulte que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, donc qu'elle est bornée.
Ainsi la suite $(f(n)a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée pour tout $r < R_a$. Par définition de R_b, il en résulte $0 < R_a \leqslant R_b$.

– On remarque que $a_n = g(n) b_n$, où g est la fraction rationnelle $\dfrac{1}{f}$.
En reprenant ce qui précède, mais en inversant les rôles, on en déduit que si $R_b > 0$ alors $0 < R_b \leqslant R_a$.

– En résumé : si l'un des deux rayons R_a ou R_b est strictement positif, alors les deux rayons R_a et R_b sont égaux. L'autre cas est bien sûr celui ou les deux rayons sont nuls.
Finalement : les deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum f(n) a_n z^n$ ont le même rayon de convergence. □

Proposition 8.1.7 (une situation fréquente)
Soit f une fonction rationnelle. Alors le rayon de convergence de $\sum f(n)z^n$ est égal à 1.

C'est une application évidente de la proposition 8.1.6, avec $a_n = 1$. Cette situation se produit souvent. □

Exercice 8.3 (⇝ **corrigé**)
On note d_n (resp. σ_n) le nombre de diviseurs positifs de n (resp. leur somme).
Déterminer les rayons de convergence R_d et R_σ des séries entières $\sum d_n z^n$ et $\sum \sigma_n z^n$.

Exercice 8.4 (⇝ **corrigé**)
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Proposition 8.1.8 (utilisation de la règle de d'Alembert)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence.
On suppose $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0. On note $u_n = a_n z^n$, avec z fixé non nul.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$.
En utilisant la règle de D'Alembert (voir proposition 6.2.6), on en déduit le résultat suivant :
Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$ (en notant $R = +\infty$ si $\ell = 0$, et $R = 0$ si $\ell = +\infty$).

Comme indiqué dans l'énoncé, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell\,|z|$.

- Si $\ell = 0$, alors la série de terme général $u_n = a_n z^n$ converge pour tout z de $\mathbb{C}^*$. Donc $R = +\infty$.
- Si $\ell = +\infty$, alors la série de terme général $u_n = a_n z^n$ ne converge pour aucun z de $\mathbb{C}^*$. Donc $R = 0$.
- Si $\ell > 0$, alors $\sum u_n$ converge si $\ell\,|z| < 1$, et diverge si $\ell\,|z| > 1$.
  Ainsi $\sum a_n z^n$ converge si $|z| < \dfrac{1}{\ell}$, et diverge si $|z| > \dfrac{1}{\ell}$. On a alors $R = \dfrac{1}{\ell}$. □

Exercice 8.5 (⇝ **corrigé**)
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $a_n = \dbinom{2n}{n}$.

▷ Complément : cas des séries entières « lacunaires »

Dans la proposition précédente, il est recommandé de revenir à la forme originale de la règle de d'Alembert, donc d'introduire $u_n(z) = a_n z^n$ avant d'étudier la limite du rapport $|u_{n+1}/u_n|$.

En d'autres termes, on évitera de s'en tenir à la seule étude du quotient $|a_{n+1}/a_n|$.

Le piège réside en effet dans l'étude des séries entières $\sum a_n z^n$ *lacunaires*, ainsi nommées parce que l'ensemble des indices n tels que $a_n = 0$ est infini.

Il en est ainsi des séries $\sum \alpha_n\, z^{2n}$ pour lesquelles $\begin{cases} a_{2n} &= \alpha_n \\ a_{2n+1} &= 0 \end{cases}$, et $\sum \alpha_n\, z^{2n+1}$ où $\begin{cases} a_{2n} &= 0 \\ a_{2n+1} &= \alpha_n \end{cases}$

Exercice 8.6 (⇝ **corrigé**)
Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum (n^5+5^n)z^{2n+1}$.

Exercice 8.7 (⇝ **corrigé**)
Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum n!\, z^{n^2}$.

8.1.3 Somme et produit de deux séries entières

Proposition 8.1.9 (somme de deux séries entières)
Soit $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.
Soit ρ le rayon de convergence de la « série entière somme » $\sum (a_n+b_n)z^n$.
Si $R_a \neq R_b$, on a l'égalité $\rho = \min(R_a, R_b)$. Si $R_a = R_b$ $(= R)$, on a l'inégalité $\rho \geqslant R$.
Dans tous les cas, et si $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_nz^n$.

– Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ sont absolument convergentes.
  Il en est donc de même de la série entière $\sum(a_n+b_n)z^n$, et il en résulte $\rho \geqslant \min(R_a, R_b)$.
  Par sommation de séries convergentes, et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$: $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_nz^n$.
– Supposons $R_a \neq R_b$, et par exemple $0 \leqslant R_a < R_b$. On se donne r dans $]R_a, R_b[$.
  La série $\sum a_nr^n$ est (grossièrement) divergente, et la série $\sum b_nr^n$ est convergente.
  Il en résulte que la série $\sum(a_n+b_n)r^n$ est divergente. Ainsi $\rho \leqslant r$.
  Comme cela est vrai pour tout r de $]R_a, R_b[$, on a : $\rho \leqslant R_a$, donc finalement $\rho = R_a = \min(R_a, R_b)$. □

Exercice 8.8 (⇝ **corrigé**)
Préciser le rayon de convergence et la somme de $\sum a_nz^n$, avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (2+(-1)^n)^n$.

Proposition 8.1.10 (produit de Cauchy de deux séries entières)
Soit $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.
Leur produit de Cauchy *est, par définition, la série entière $\sum c_nz^n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_pb_q$.*
Soit r le rayon de convergence de la série entière $\sum c_nz^n$.
Alors $r \geqslant \min(R_a, R_b)$. Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_nz^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_nz^n\Big)$

Fixons z dans $\mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Posons $u_n = a_nz^n$ et $v_n = b_nz^n$.
Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont donc absolument convergentes.
Leur produit de Cauchy (au sens de la définition 6.3.1) est la série $\sum w_n$ définie par $w_n = \sum_{p+q=n} u_pv_q$.
Ainsi $w_n = \sum_{p+q=n}(a_pz^p)(b_qz^q) = \Big(\sum_{p+q=n} a_pb_q\Big)z^n = c_nz^n$.
La série $\sum c_nz^n$ est donc le produit de Cauchy (au sens de 8.1.10) des séries entières $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$.

On sait (prop. 6.3.1) que $\sum w_n$ converge absolument et que $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Autrement dit : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\Bigr)$ pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, et on a : $r \geqslant \min(R_a, R_b)$. □

Exercice 8.9 (⇝ **corrigé**)
En utilisant des produits de Cauchy, calculer les sommes des séries entières $\sum nz^n$ et $\sum n^2 z^n$.

8.2 Régularité de la somme

8.2.1 Continuité de la somme

Proposition 8.2.1 (convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.
Alors cette série converge normalement sur tout segment de l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

Soit $J = [\alpha, \beta]$ un segment inclus dans $]-R, R[$.

Soit $0 \leqslant \rho < R$ tel que $J \subset [-\rho, \rho]$. On sait que la série $\sum a_n \rho^n$ est absolument convergente.

On a : $\forall x \in J$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| \leqslant |a_n| \rho^n$. La série $\sum a_n x^n$ est donc normalement convergente sur J. □

▷ Un contre-exemple à connaître

Il se peut qu'une série entière $\sum a_n x^n$ ne soit pas uniformément convergente (et a fortiori pas normalement convergente) sur son intervalle ouvert de convergence.

C'est le cas pour $\sum x^n$, dont le rayon est $R = 1$, et dont la somme est $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1, 1[$.

Pour tout N, le reste d'ordre N est $R_N(x) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{N+1}}{1-x}$, et $\sup_{[-1,1[} |R_N(x)| = +\infty$.

Proposition 8.2.2 (continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la somme $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

D'abord les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues.

Ensuite $\sum a_n x^n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $]-R, R[$ (prop. 8.2.1).

On peut donc appliquer la proposition 7.4.1 (et plus exactement son « adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment ») et conclure à la continuité de la somme S sur $]-R, R[$. □

▷ En cas de convergence absolue au bord de l'intervalle

Si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-R, R]$.

Dans ce cas, la somme $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur le segment $[-R, R]$.

On montre le résultat suivant (qui n'est pas explicitement au programme) et que nous admettrons :

Proposition 8.2.3 ((hors-programme) convergence en une extrémité de l'intervalle de convergence)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.
On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Alors $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$.
En particulier, la somme $S(x)$ est continue en R. Ainsi $\lim\limits_{x\to R} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Remarques (rappel : c'est hors-programme)

– On a un résultat analogue à l'extrémité $-R$ de l'intervalle de convergence.

– Il peut y avoir convergence en l'une et l'une seulement des extrémités $\pm R$.
Penser par exemple à la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$: le rayon vaut 1, il a convergence en -1 et divergence en 1.

– On verra plus loin que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour tout x de $]-1, 1[$.
Le fait que la série converge en $x = -1$ permet d'écrire : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \lim\limits_{x\to -1} (-\ln(1-x)) = -\ln(2)$.
L'exercice suivant démontre ce résultat tout en restant dans les limites du programme.

Exercice 8.10 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
On admet ici que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour tout x de $]-1, 1[$.
Montrer que la série entière $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $[-1, 0]$. En déduire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

▷ Continuité sur le disque ouvert de convergence (variable complexe)

Proposition 8.2.4 (continuité sur le disque ouvert, variable complexe)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la somme $z \mapsto S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une application continue sur le disque ouvert de convergence.

Attention : ce résultat (qui selon le programme doit être admis) ne doit pas être confondu avec la proposition 8.2.1 car S est ici une fonction de la variable complexe z, définie pour $|z| < R$.

La continuité en un point z_0 du disque ouvert de convergence signifie : $\lim\limits_{z\to z_0} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$.

On se donne z_0, avec $|z_0| < R$. Soit $r > 0$ tel que $\rho = |z_0| + r < R$.
Pour prouver la continuité de S en z_0, on peut se restreindre au disque fermé Δ de centre z_0 et de rayon r.
Pour tout z de Δ, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a (en utilisant la majoration $\max(|z|, |z_0|) \leqslant \rho$) :

$$|z^n - z_0^n| = |z - z_0| \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}\right| \leqslant |z - z_0| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k |z_0|^{n-1-k} \leqslant |z - z_0|\, n\rho^{n-1}$$

On a alors $|S(z) - S(z_0)| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z^n - z_0^n| \leqslant M |z - z_0|$, avec $M = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n |a_n| \rho^{n-1}$.
Le calcul précédent est justifié par la convergence de la série $\sum n |a_n| \rho^{n-1}$. En effet, on sait depuis la proposition 8.1.5 que les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ sont égaux. □

8.2.2 Primitivation et dérivation de la somme

Proposition 8.2.5 (séries entières obtenues par primitivation ou dérivation terme à terme)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
La série entière $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est dite obtenue par « intégration terme à terme » de $\sum a_n z^n$.
La série entière $\sum (n+1)a_{n+1} z^n$ est dite obtenue par « dérivation terme à terme » de $\sum a_n z^n$.
Toutes ces séries entières ont le même rayon de convergence.

Le fait que les rayons de convergence soient égaux découle de la proposition 8.1.6. □

On peut bien sûr généraliser à la série entière obtenue par k dérivations successives terme à terme :
Cette série entière, qui s'écrit $\sum \dfrac{(n+p)!}{n!}\, a_{n+p}\, z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

Attention : tant que la variable z est complexe, il ne s'agit ici que de dérivation et de primitivation symbolique. Dans le cas d'une variable réelle, ces définitions trouvent leur justification dans les trois propositions suivantes.

Proposition 8.2.6 (primitivation de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.
Soit $x \mapsto S(x)$ la somme de cette série entière sur $]-R, R[$.
La primitive de S qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.
On peut donc écrire : $\forall\, x \in]-R, R[,\ \displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$.

On retiendra que la somme d'une série entière peut être primitivée « terme à terme » sur son intervalle ouvert de convergence.

On sait depuis la proposition 8.1.6 que $\sum a_n x^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont le même rayon de convergence.
On se donne x dans $]-R, R[$. On sait que $\sum a_n t^n$ converge uniformément sur $[0, x]$ (cf prop. 8.2.1).
On peut donc intégrer terme à terme sur ce segment (voir la proposition 7.4.3).
On en déduit : $\displaystyle\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. □

Exercice 8.11 (⇝ **corrigé**)
Préciser le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$.

Proposition 8.2.7 (dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.
Soit $x \mapsto S(x)$ la somme de cette série entière sur $]-R, R[$.
Alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et : $\forall\, x \in]-R, R[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

On retiendra que la somme d'une série entière peut être dérivée « terme à terme » sur son intervalle ouvert de convergence.

On sait depuis la proposition 8.1.5 que $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.
Les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.
Ensuite $\sum n a_n x^{n-1}$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $]-R, R[$ (prop. 8.2.1).
On peut donc utiliser l'adaptation de la prop. 7.4.4 au cas où la convergence est uniforme sur tout segment.
Ainsi S est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et : $S'(x) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. □

Exercice 8.12 (⇝ **corrigé**)
Préciser le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum (-1)^{n+1} n\, x^{2n+1}$.

Le résultat précédent se généralise à un nombre quelconque de dérivations successives.

Proposition 8.2.8 (dérivations successives terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la somme $x \mapsto S(x)$ de cette série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.
Plus précisément, pour tout p de $\mathbb{N}$, la fonction $S^{(p)}$ s'obtient par p dérivations terme à terme.
Autrement dit : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R, R[,\ S^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}\, x^n = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-p)!} a_n\, x^{n-p}$.

L'expression $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ est un polynôme en la variable n.
D'après la prop. 8.1.6, les séries $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-p)!} a_n\, x^{n-p}$ et $\sum a_n x^n$ ont donc le même rayon de convergence.
On peut utiliser l'adaptation de la prop. 7.4.5 au cas où la convergence est uniforme sur tout segment.
On peut également utiliser la proposition 8.2.7 et procéder par récurrence (évidente) sur p. □

▷ Les séries entières en tant que séries de fonctions d'une variable réelle

- On retiendra qu'une série entière peut être indéfiniment dérivée (ou primitivée) terme à terme, et que toutes les séries entières obtenues par des dérivations ou primitivations successives ont le même rayon de convergence que la série entière initiale.
- Les séries entières (considérées comme des fonctions d'une variable réelle) sont des séries de fonctions très particulières : en ce qui les concerne, il n'est donc pas nécessaire (il serait même maladroit) d'évoquer les hypothèses des propositions 7.4.4 et 7.4.5.

La proposition a deux conséquences intéressantes : la première est que les coefficients d'une série entière sont déterminés par les dérivées successives de la somme de cette série à l'origine :

Proposition 8.2.9 (coefficients d'une série entière et dérivées successives en 0)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon $R > 0$, de somme $x \mapsto S(x)$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a l'égalité : $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, et $x \in]-R, R[$, on a : $S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n = p!\, a_p + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^{n-1}$.

En particulier $S^{(p)}(0) = p!\, a_p$, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 8.2.10 (identification terme à terme de deux séries entières)
Soit $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *deux séries entières de rayons de convergence* $R_a > 0$ *et* $R_b > 0$.
Soit r *un réel strictement positif, inférieur ou égal à* $\min(R_a, R_b)$.
On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *pour tout* x *de* $]-r, r[$. *Alors* $a_n = b_n$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.

Le rayon de convergence R de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) x^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

Ainsi S est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. La proposition 8.2.9 donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - b_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Par hypothèse, S est identiquement nulle sur $]-r, r[$. Toutes ses dérivées sont donc nulles à l'origine.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont égales « formellement ». □

▷ Parité ou imparité de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon $R > 0$, de somme $x \mapsto S(x)$.
La fonction $x \mapsto S(x)$ est paire (resp. impaire) si et seulement si les a_{2n+1} (resp. les a_{2n}) sont nuls.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, posons $b_n = (-1)^n a_n$.

Les séries entières $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $T(x) = S(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ont le même rayon de convergence.

- La parité de S (c'est-à-dire l'égalité $S = T$) équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$ (c'est-à-dire $a_n = (-1)^n a_n$).

  Elle équivaut donc à : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$.
- L'imparité de S (l'égalité $S = -T$) équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -b_n$ (c'est-à-dire $a_n = (-1)^{n+1} a_n$).

  Elle équivaut donc à : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$. □

8.3 Développement en série entière

8.3.1 Fonctions développables en série entière

Définition 8.3.1 (fonction développable en série entière sur $]-r, r[$)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.
Soit r un réel strictement positif, tel que $]-r, r[$ soit inclus dans I.
On dit que f est *développable en série entière* sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ (de rayon de convergence au moins égal à r) telle que : $\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Remarque sur le domaine de définition et le rayon de convergence

La définition précédente suppose d'une part que $]-r, r[$ est inclus dans l'intervalle de définition I de f, d'autre part que r est inférieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
Dans les deux cas, il peut y avoir inclusion (ou inégalité) stricte.

Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Pour tout x de $]-1, 1[$, on a $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, donc f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

Bien sûr $f(x)$ existe encore en dehors de $]-1, 1[$, mais ne peut plus être représenté par cette série entière.

Enfin, rien ne nous empêche de poser $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et de prolonger f arbitrairement en dehors de cet intervalle.

On a alors $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ seulement sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, alors que le rayon de convergence vaut 1.

Définition 8.3.2 (série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I contenant 0.

On appelle *série de Taylor* de f la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 8.3.1 (caractère nécessaire de la série de Taylor)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.
Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-r, r[$.
La série entière égale à f sur $]-r, r[$ est alors nécessairement la série de Taylor de f.

Autrement dit, on a nécessairement : $\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

On retiendra « l'unicité du développement en série entière » d'une fonction f définie au voisinage de 0 : si f est développable en série entière, ça ne peut être que sous la forme de sa série de Taylor.

> C'est une conséquence immédiate des propositions 8.2.2 (la somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence) et 8.2.9 (expression des coefficients d'une série entière en fonction des dérivées successives en 0 de la somme de cette série). □

▷ Développement en série entière et développement limité

Le développement en série entière d'une fonction f sur un intervalle $]-r, r[$ s'apparente à une sorte de « développement limité d'ordre infini » en 0 (les coefficients sont les mêmes), mais il y a une différence notable : un développement limité en 0 n'a qu'un *caractère local* (il n'exprime qu'une approximation de f quand x tend vers 0), alors que le développement en série entière possède un *caractère global* (il donne une représentation exacte de f sur tout l'intervalle $]-r, r[$).

▷ Un exemple du caractère non suffisant de la série de Taylor

Attention : même si f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ au voisinage de l'origine, et même si la série de Taylor de f a un rayon de convergence strictement positif, il est possible que f ne soit pas développable en série entière (c'est-à-dire que la somme de la série de Taylor de f ne soit pas égale à f).

Le contre-exemple classique est fourni par l'application $f : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ (prolongée par $f(0) = 0$).

Exercice 8.13 (⇝ **corrigé**)
(exemple classique du caractère non suffisant de la série de Taylor)
On définit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, en la prolongeant à l'origine par $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

b) La fonction f est-elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$?

▷ Opérations sur les fonctions développables en série entière

Soit f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$. Les résultats suivants sont des conséquences immédiates des propositions 8.1.9 (somme de deux séries entières), 8.1.10 (produit de Cauchy de deux séries entières), 8.2.2 (dérivations successives terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence), et 8.2.6 (primitivation sur l'intervalle ouvert de convergence).

– pour tous scalaires α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est développable en série entière sur $]-r, r[$.
  la fonction fg est développable en série entière sur $]-r, r[$.
– les dérivées successives de f sont développables en série entière sur $]-r, r[$, et leur développement s'obtient par dérivations successives, terme à terme, de celui de f.
– les primitives de f sont développables en série entière sur $]-r, r[$, et leur développement s'obtient par intégration terme à terme de celui de f (attention tout de même à la constante d'intégration).

8.3.2 Développements usuels en série entière

On donne ici les développements en série entière usuels (ceux qui sont au programme et ceux qui s'en déduisent facilement), en précisant l'intervalle $]-r, r[$ sur lequel ces développements sont valables.
Rappelons qu'on ne considère ici que des développements en série entière de la variable réelle x.

▷ Fonction exponentielle

Les trois développements suivants sont valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}} \qquad \boxed{\forall\, a > 0, \quad a^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n} \qquad \boxed{\forall\, \omega \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{\omega x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{n!} x^n}$$

– On se donne ω dans $\mathbb{C}^*$ (le cas $\omega = 0$ est trivial), et on pose $f(x) = \mathrm{e}^{\omega x}$ pour tout x réel.
  Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) = \omega^n \mathrm{e}^{\omega x}$, et en particulier $f^{(n)}(0) = \omega^n$.
  La série de Taylor de f est donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_n = \dfrac{\omega^n}{n!}$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\omega|}{n+1} = 0$.
  La règle de D'Alembert (cf prop. 8.1.8) nous donne donc le rayon de convergence $R = +\infty$.
  On utilise la formule de Taylor avec reste intégral (voir cours de première année).
  Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout N de $\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\mathrm{e}^{\omega x} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega^n}{n!} x^n + J_N(x)$, avec $\displaystyle J_N(x) = \omega^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \mathrm{e}^{\omega t}\, \mathrm{d}t$.
  Avec le changement de variable $t = ux$ (donc $0 \leqslant u \leqslant 1$), on obtient : $\displaystyle J_N(x) = \frac{(\omega x)^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-u)^N \mathrm{e}^{u\omega x}\, \mathrm{d}u$.
  Ainsi $\displaystyle|J_N(x)| \leqslant \frac{|\omega x|^{N+1}}{N!} \mathrm{e}^{|\omega x|} \int_0^1 (1-u)^N\, \mathrm{d}u$, c'est-à-dire $\displaystyle|J_N(x)| \leqslant \frac{|\omega x|^{N+1}}{(N+1)!} \mathrm{e}^{|\omega x|}$.

Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\omega x|^{N+1}}{(N+1)!} = 0$ car c'est le terme général d'une série convergente.

Ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty} J_N(x) = 0$, et il en résulte : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\omega x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{n!}\, x^n$.

– Les deux autres résultats ne sont que des cas particuliers du précédent.

Avec $\omega = 1$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Avec $\omega = \ln(a)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$. □

Exercice 8.14 (⇝ **corrigé**)

Préciser le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\sum \dfrac{n^3}{n!} x^n$.

Exercice 8.15 (⇝ **corrigé**)

Préciser le rayon de convergence R et calculer la somme de la série entière $\sum \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

▷ Fonctions trigonométriques directes

Les quatre développements suivants sont valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.

– avec les parties réelle et imaginaire de e^{ix} : $\boxed{\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$ $\boxed{\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$

– avec les parties paires et impaires de e^x : $\boxed{\mathrm{ch}\,(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$ $\boxed{\mathrm{sh}\,(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$

– Pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^{ix} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n$ et $\mathrm{e}^{-ix} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i^n}{n!} x^n$.

On en déduit, toujours pour tout réel x :

D'une part : $\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} i^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

D'autre part : $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{2} i^{n-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

– Pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ et $\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$. Ainsi, pour tout réel x :

$\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ □

Exercice 8.16 (⇝ **corrigé**)

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin(x)$.

Exercice 8.17 (⇝ **corrigé**)

Préciser le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n x^n}{(2n+1)!}$.

▷ **Fonctions** $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ **et** $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

Ces deux développements sont valables sur $]-1,1[$: $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$ $\boxed{\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n}$

Pour $\dfrac{1}{1-x}$ c'est un résultat connu (voir proposition 6.1.3), et le passage de $\dfrac{1}{1-x}$ à $\dfrac{1}{1+x}$ est évident. □

▷ **Fonctions** $x \mapsto \ln(1-x)$ **et** $x \mapsto \ln(1+x)$

Par primitivation terme à terme, sur $]-1,1[$: $\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}}$ $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, \dfrac{x^n}{n}}$

Le développement de $x \mapsto \ln(1+x)$ est encore valable en $x=1$. Ainsi : $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

Exercice 8.18 (⇝ **corrigé**)
Trouver le développement en série entière de $f(x) = \ln(6-5x+x^2)$

Exercice 8.19 (⇝ **corrigé**)
Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Préciser le rayon R et la somme de la série entière $\sum H_n\, x^n$.

▷ **Fonction** $x \mapsto \arctan(x)$

En primitivant $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n}$, sur $]-1,1[$: $\boxed{\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}}$

Le développement de $x \mapsto \arctan(x)$ est encore valable en $x=1$. Ainsi : $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 8.20 (⇝ **corrigé**)
Déterminer le développement en série entière de $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$, où $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

▷ **Développement de** $(1+x)^\alpha$

Ce développement est valable sur $]-1,1[$: $\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n}$

Deux remarques :
- Si α est dans $\mathbb{N}$, le développement précédent est fini (il se réduit au développement de $(1+x)^\alpha$ par la formule du binôme), et $R=+\infty$ (invoquer les séries entières semble ici un peu exagéré).
- Si α n'est pas un entier, on se gardera bien d'exprimer $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ avec des factorielles.

- On pose $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x>-1$ (donc en particulier sur $]-1,1[$).
  Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout $x>-1$, on a $f^{(n)}(x) = \lambda_n(1+x)^{\alpha-n}$, avec $\lambda_n = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$.
  En particulier $f^{(n)}(0) = \lambda_n$. La série de Taylor de la fonction f est donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_n = \dfrac{\lambda_n}{n!}$.
  On a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{n+1}\left|\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right| = \dfrac{|n-\alpha|}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.
  La règle de D'Alembert (cf prop. 8.1.8) nous donne donc le rayon de convergence $R=1$.

– On utilise la formule de Taylor avec reste intégral (voir cours de première année).

Pour $x > -1$ et $N \geqslant 0$, on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda_n}{n!} x^n + J_N(x)$, avec $J_N(x) = \lambda_{N+1} \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} (1+t)^{\alpha-N-1}\,\mathrm{d}t$.

On pose $t = ux$ (donc $0 \leqslant u \leqslant 1$), et on trouve $J_N(x) = \dfrac{\lambda_{N+1}\, x^{N+1}}{N!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^N (1+xu)^{\alpha-N-1}\,\mathrm{d}t$

– On observe que $(1-u)^N(1+xu)^{\alpha-N-1} = (\varphi(u))^N(1+xu)^{\alpha-1}$, avec $\varphi(u) = \dfrac{1-u}{1+xu}$.

Pour tout u de $[0,1]$, on a $\varphi'(u) = -\dfrac{x+1}{(1+xu)^2} < 0$, donc φ est décroissante sur $[0,1]$.

Or $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$. On a donc $0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1$ pour tout u de $[0,1]$.

On majore ainsi $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^N(1+xu)^{\alpha-N-1}\,\mathrm{d}t$, indépendamment de N, par $K_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^1 (1+xu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$.

– Pour $x \in]-1,1[$ et $N \in \mathbb{N}$, on a obtenu : $|J_N(x)| \leqslant \dfrac{\lambda_{N+1}\,|x|^{N+1}}{N!} K_\alpha(x)$.

Mais cette dernière quantité est le terme général d'une série convergente.

Ainsi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} J_N(x) = 0$, et on a prouvé : $\forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\,x\,]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \square$

Exercice 8.21 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

Préciser le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^3 x^n$.

▷ **Complément : fractions rationnelles**

Pour $a \in \mathbb{C}^*$, on a le développement sur $\big]-|a|\,,|a|\big[$: $\quad \dfrac{1}{a-x} = \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{x}{a}\Big)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}$

Puis, après p dérivations terme à terme sur $\big]-|a|\,,|a|\big[$: $\quad \dfrac{1}{(a-x)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}\frac{x^n}{a^{n+p+1}}$.

Plus généralement, si f est une fonction rationnelle de la variable réelle x, n'admettant pas 0 pour pôle, alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$, où r est le plus petit module d'un pôle de f.

Exercice 8.22 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

On définit une suite d'entiers $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, et : $\forall\,n \geqslant 3,\ u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$.

Montrer que, sur un intervalle à préciser : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, x^n = \frac{x^2-2}{x^3+x^2-1}$.

8.3.3 Méthode de l'équation différentielle

On se propose ici de décrire une méthode permettant, dans certains cas, de former le développement en série entière d'une fonction $x \mapsto f(x)$ définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Voici les principales étapes de cette méthode :

– On détermine une équation différentielle linéaire (E) vérifiée par f sur l'intervalle I.
  (E) s'écrit en général : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = d(x)$, ou $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x)$.
  Dans cette écriture, a, b, c, d sont des fonctions très simples (souvent polynomiales, et en tout cas développables en série entière avec un développement connu).

– On suppose pour l'instant (à moins qu'on ne le sache déjà, notamment si f est obtenue par produits ou sommes de fonctions connues développables en série entière) que f est développable en série entière. On écrit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on en déduit le développement de f', f'' par dérivation terme à terme.

– On « injecte » ces développements dans (E), et on réorganise le résultat pour faire apparaître une égalité sur $]-r, r[$ entre les sommes de deux séries entières.
On utilise la proposition 8.2.10 pour identifier les coefficients de même degré.

– On aboutit alors à des relations de récurrence sur les coefficients a_n.
Ces relations, et les conditions initiales ($f(0) = a_0$ et éventuellement $f'(0) = a_1$) permettent en principe de calculer l'expression des coefficients a_n.
À ce stade, on détermine le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

– Ainsi $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sont solutions de (E) sur un intervalle de centre 0.
L'unicité de la solution au « problème de Cauchy » (i.e. de la solution de (E) avec des conditions initiales données) permet alors de conclure à l'égalité $f(x) = S(x)$ sur un intervalle $]-r, r[$.

Exercice 8.23 (⇝ **corrigé**)
Retrouver le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ avec la méthode de l'équation différentielle.

Exercice 8.24 (⇝ **corrigé**)
Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto f(x) = \arcsin^2(x)$.

Exercice 8.25 (⇝ **corrigé**)
On définit la fonction $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

1. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
2. Montrer que f satisfait à $(1-x^2)y' - xy = 1$. En déduire une expression de f.

8.4 Séries géométrique et exponentielle

Proposition 8.4.1 (développement de $z \mapsto 1/(1-z)$ sur le disque unité ouvert)
Pour tout z tel que $|z| < 1$, on a l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (rayon de convergence égal à 1).
La série entière $\sum z^n$ est connue sous le nom de « série géométrique ».

Pour $|z| < 1$, et $N \in \mathbb{N}$: $\left|\frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{N} z^n\right| = \left|\frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{N+1}}{1-z}\right| = \left|\frac{z^{N+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{|z|^{N+1}}{1-|z|} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$
Ainsi, pour tout z tel que $|z| < 1$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1}{1-z}$ □

Exercice 8.26 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Pour tout p de $\mathbb{N}$, et pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ montrer que : $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} z^n$.

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on connait le développement en série entière sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{\omega x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{n!}\, x^n$ (voir 8.3.2).
La propriété suivante constitue le cas particulier $x = 1$.

Proposition 8.4.2 (développement de $z \mapsto \exp(z)$ sur $\mathbb{C}$)
Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$ *(rayon de convergence infini).*
La série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est connue sous le nom de « série exponentielle ».

Exercice 8.27 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
(la fonction exponentielle complexe définie comme somme d'une série entière)
On considère l'égalité $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ comme une *définition* de la fonction exponentielle complexe.
Montrer que, pour tous a et b de $\mathbb{C}$, on a l'égalité : $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.