Chapitre 10

Intégration

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

10.1 Fonctions continues par morceaux . . . 196
- 10.1.1 Fonctions continues par morceaux . . . 196
- 10.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . 198
- 10.1.3 Propriétés de l'intégrale sur un segment . . . 199

10.2 Intégrales généralisées . . . 203
- 10.2.1 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$ . . . 203
- 10.2.2 Intégrale sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert . . . 204
- 10.2.3 Intégrales de référence . . . 206
- 10.2.4 Propriétés des intégrales généralisées . . . 208
- 10.2.5 Calcul des intégrales généralisées . . . 209

10.3 Fonctions intégrables . . . 213
- 10.3.1 Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables . . . 213
- 10.3.2 Intégrabilité et relations de comparaison . . . 214
- 10.3.3 Fonctions de carré intégrable . . . 218

10.4 Suites et séries de fonctions intégrables . . . 220
- 10.4.1 Le théorème de convergence dominée . . . 220
- 10.4.2 Le théorème d'intégration terme à terme . . . 221

10.5 Intégrales à paramètre . . . 222
- 10.5.1 Le théorème de continuité des intégrales à paramètre . . . 222
- 10.5.2 Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre . . . 223
- 10.5.3 Transformée de Fourier . . . 226
- 10.5.4 Transformée de Laplace . . . 227

10.1 Fonctions continues par morceaux

En conformité avec le programme, toutes les fonctions évoquées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

10.1.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 10.1.1 (subdivisions d'un segment)
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.
On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, avec $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
L'ensemble $\{a = x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$ est appelé le *support* de la subdivision.
La quantité $h = \max\limits_{0\leqslant k<n}(x_{k+1} - x_k)$ est appelée le *pas* de la subdivision.

Finesse d'une subdivision

Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.
On dit que σ est *plus fine* que σ' si le support de σ contient celui de σ'.
Dans le cas général, la subdivision notée $\sigma \cup \sigma'$ et dont le support est la réunion de ceux de σ et de σ' est plus fine que chacune des subdivisions σ et σ'.
Réciproquement si une subdivision de $[a, b]$ est plus fine que σ et σ', alors elle est plus fine que $\sigma \cup \sigma'$.

Subdivisions régulières

On est parfois amené à considérer des subdivisions régulières d'un segment $[a, b]$.
Une telle subdivision en $n + 1$ points, de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$ est définie par : $\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ x_k = a + kh$.
La fonction `linspace` du package `numpy` permet de former de telles subdivisions :

```
>>> import numpy as np   # importe le module numpy, et le renomme en np
>>> np.linspace(2,5,11)  # subdivision régulière de [2,5] en 11 points (pas h = 0.3)
array([ 2. ,  2.3,  2.6,  2.9,  3.2,  3.5,  3.8,  4.1,  4.4,  4.7,  5. ])
```

Définition 10.1.2 (fonction continue par morceaux sur un segment)
Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que f est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a, b]$ (dite adaptée à f, ou encore subordonnée à f) telle que, pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$:
– la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
– cette restriction est prolongeable par continuité aux points x_k et x_{k+1}.
On note $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarques et propriétés

– Si σ est une subdivision adaptée à f, toute subdivision σ' plus fine que σ est encore adaptée à f.

Quitte à répéter l'opération, il suffit de le vérifier quand on ajoute une seule abscisse c à $\sigma = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
Cette abscisse c appartient à un unique sous-intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.
On passe donc de σ à σ' en remplaçant $]x_k, x_{k+1}[$ par les deux intervalles $]x_k, c[$ et $]c, x_{k+1}[$.
Les termes de la définition 10.1.2 sont bien sûr vérifiés sur ces deux sous-intervalles. □

– Dire que f est dans $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{K})$, c'est dire qu'elle n'a au plus qu'un nombre fini de discontinuités, et qu'en chacune d'elles, il y a une limite à gauche finie et une limite à droite finie.

– Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.

On reprend les notations de la définition 10.1.2.

La restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ se prolonge en une fonction f_k continue sur le segment $J_k = [x_k, x_{k+1}]$.

Notons $M_k = \max\limits_{x\in J_k} |f_k(x)|$, puis $M = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} M_k$. Posons $M' = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |f(x_k)|$.

On a alors : $\forall\, x \in [a,b],\ |f(x)| \leqslant \max\{M, M'\}$. La fonction f est donc bornée sur $[a,b]$. □

Définition 10.1.3 (fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{K}$.
On dit que f est continue par morceaux sur I si elle l'est sur tout segment de I.
On note $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Toute fonction continue sur I est continue par morceaux sur I (il n'y a qu'un seul « morceau » !).

Opérations sur les fonctions continues par morceaux

Soit f et g dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$. Pour tous α, β de $\mathbb{K}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$.

L'ensemble $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ est donc muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

De même, la fonction fg est continue par morceaux sur I.

Il suffit de le vérifier sur tout segment J inclus dans l'intervalle I.
Soit σ_f (resp. σ_g) une subdivision de J adaptée à f (resp. à g).
La subdivision $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g$ est alors adaptée simultanément à f et à g.

Sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ défini par σ, les restrictions de f et g sont continues (et prolongeables par continuité en x_k et x_{k+1}).
Il en est donc de même pour les restrictions des fonctions $\alpha f + \beta g$ et fg.
Ainsi $\alpha f + \beta g$ et fg sont continues par morceaux sur tout segment J inclus dans I (et donc sur I). □

Cas des fonctions à valeurs complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Soit $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}\ (f)$.

La fonction f est dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$ si et seulement si u et v sont dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$.

– On suppose que f est dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$. Soit J un segment inclus dans I.
  On reprend les notations de la définition 10.1.2.
  Les termes de cette définition, avec cette même subdivision, s'appliquent à $u = \mathrm{Re}(f)$ et à $v = \mathrm{Im}\ (f)$.
  Ainsi u et v sont continues par morceaux sur tout segment J inclus dans I (et donc sur I).

– Réciproquement, on suppose que u et v sont dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$. Soit J un segment inclus dans I.
  Soit σ_u (resp. σ_v) une subdivision de J adaptée à u (resp. à v).

La subdivision $\sigma = \sigma_u \cup \sigma_v$ est alors adaptée simultanément à u et à v.

Sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ défini par σ, les restrictions de u et v sont continues (et prolongeables par continuité en x_k et x_{k+1}). Il en est donc de même pour la restriction de la fonction $f = u + iv$.

Ainsi f est continue par morceaux sur tout segment J inclus dans I (et donc sur I). □

Valeur absolue (module), partie positive, partie négative

Si $t \mapsto f(t)$ est continue par morceaux sur I, alors $t \mapsto |f(t)|$ est continue par morceaux sur I.

Soit J un segment inclus dans I, et soit σ une subdivision de J adaptée à f.

Sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ défini par σ, la restriction de f est continue (et prolongeable par continuité en x_k et x_{k+1}). Il en est donc de même pour la restriction de la fonction $|f|$. Ainsi la fonction $|f|$ est continue par morceaux sur tout segment J inclus dans I, donc sur I. □

Définition 10.1.4 (rappel : partie positive ou négative d'une fonction réelle)

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs réelles.

On définit les fonctions $f^+ = \max(f, 0) = \dfrac{f + |f|}{2}$ et $f^- = \max(-f, 0) = \dfrac{|f| - f}{2}$.

Les fonctions f^+ et f^- sont positives, et on a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, il en est de même des fonctions f^+ et f^-.

Joker pour cette démonstration, en tout point analogue aux précédentes. □

10.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

La notion d'intégrale d'une fonction *continue sur un segment* figure au programme de première année. On se propose ici de l'étendre au cas des fonctions *continues par morceaux* sur un segment.

Définition 10.1.5 (intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux, avec $a < b$.

Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f.

On note f_k le prolongement par continuité à $[x_k, x_{k+1}]$ de la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$.

Avec ces conventions, on définit : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[x_k, x_{k+1}]} f_k$.

Cette valeur est indépendante de la subdivision σ choisie (parmi toutes celles qui sont adaptées à f).

On note provisoirement $I_\sigma(f)$ l'intégrale de f sur $[a, b]$ calculée à partir de la subdivision adaptée σ.

Soit σ' une autre subdivision adaptée à f. Il faut montrer que $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$.

Il suffit pour cela de prouver que $I_\sigma(f)$ et $I_{\sigma'}(f)$ sont toutes deux égales à $I_{\sigma \cup \sigma'}(f)$.

Il s'agit donc de montrer que $I_\sigma(f)$ est inchangée quand on passe d'une subdivision adaptée σ à une subdivision adaptée plus fine, et il suffit de l'établir (quitte à répéter l'opération) quand on se contente d'ajouter un seul point c à une subdivision σ adaptée à f.

Cette abscisse c appartient à un unique sous-intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. Dans le passage de σ à $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, le sous-intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ est remplacé par les sous-intervalles $]x_k, c[$ et $]c, x_{k+1}[$, et c'est la même restriction f_k obtenue en prolongeant f aux sous-segments $[x_k, c]$ et $[c, x_{k+1}]$ (en fait f est continue en c).

On passe donc de I_σ à $I_{\sigma'}$ en remplaçant $\displaystyle\int_{[x_k, x_{k+1}]} f$ par la quantité égale $\displaystyle\int_{[x_k, c]} f + \int_{[c, x_{k+1}]} f$

(c'est une simple application de la formule de Chasles pour les intégrales de fonctions continues).

Ainsi $I_\sigma = I_{\sigma'}$, donc $I_\sigma(f) = \displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[x_k,x_{k+1}]} f_k$ ne dépend pas de la subdivision σ adaptée à f. □

Définition 10.1.6 (extension aux fonctions continues sur un intervalle)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{K}$, continue par morceaux.
Soit a, b deux éléments quelconques de I.
Si $a < b$, on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$; si $a > b$, on note $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$; si $a = b$, on note $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Remarques

– Si f est continue par morceaux sur I, on a donc défini $\displaystyle\int_a^b f$ pour deux points quelconques de I.
– Il est clair que $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ pour tous a et b de I.
– Plutôt que de noter $\displaystyle\int_a^b f$, on note souvent $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (où t est une variable *muette*).
Cette notation s'avère pratique dans le calcul des intégrales par changement de variable.

10.1.3 Propriétés de l'intégrale sur un segment

EN PCSI, on a traité l'intégration des fonctions *continues sur un segment*.
En MPSI, on a traité l'intégration des fonctions *continues par morceaux sur un segment*.
Conformément au programme de la classe de PSI, on se contente ici d'une brève extension des résultats au cas des fonctions *continues par morceaux sur un intervalle quelconque*.
On retrouve ici les principales propriétés de l'intégrale, qui seront énoncées sans démonstration.

Proposition 10.1.1 (linéarité de l'intégrale)
Soit f et g dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$, et soit α, β dans $\mathbb{K}$.
Pour tous a, b de I, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
Ainsi la fonction qui à f associe $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire *sur* $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Proposition 10.1.2 (relation de Chasles)
Soit f dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$. Soit a, b, c trois éléments quelconques de I.
Alors on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
On peut généraliser à une suite finie $(c_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de points de I : $\displaystyle\int_{c_1}^{c_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 10.1.3 (positivité et croissance, pour les fonctions à valeurs réelles)
Soit f et g dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$. Soit a, b deux éléments de I, avec $a \leqslant b$.
– *si f est positive ou nulle sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).*
– *si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (croissance de l'intégrale).*

Attention à l'hypothèse $a \leqslant b$ (les bornes doivent être « dans le bon sens »).

Exercice 10.1 (⇝ **corrigé**)

Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{n\to+\infty}{\sim} K\sqrt{n}$ et déterminer la constante K

Exercice 10.2 (⇝ **corrigé**)

Soit f une application continue et positive sur $[a, b]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{I_n} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, avec $I_n = \displaystyle\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 10.1.4 (rappel : intégrale d'une fonction continue de signe constant)

Soit f et g dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$. Soit a, b deux éléments de I, avec $a \neq b$.

On suppose que f est continue sur le segment $[a, b]$, et qu'elle y garde un signe constant.

Alors on a l'équivalence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \big(\forall t \in [a, b],\ f(t) = 0\big)$.

Conséquences immédiates :

– Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ est continue, avec $a < b$, et si f n'est pas identiquement nulle, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.

– Si f, g sont continues sur $[a, b]$, avec $a < b$, et si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ mais $f \neq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

Exercice 10.3 (⇝ **corrigé**)

Soit f une application $[a, b] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

b) Reprendre l'exercice avec $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Proposition 10.1.5 (inégalité de la moyenne)

Soit f dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$. Soit a et b deux éléments de I, avec $a \leqslant b$.

Alors on a les inégalités : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} |f(x)|$.

Si on abandonne l'hypothèse $a \leqslant b$, on doit écrire : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |b-a| \sup_{[a,b]} |f(x)|$

La seule difficulté ici est l'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ quand f est à valeurs *complexes*.

– Dans un premier temps, on suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel positif ou nul.

Soit $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}\ (f)$. Ainsi $\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

On a l'inégalité $g \leqslant |f|$ donc $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, et on a bien obtenu $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

– Dans le cas général, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Posons $\varphi = e^{-i\theta} f$: la fonction φ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

On a $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \rho \in \mathbb{R}^+$, ce qui nous ramène au premier cas.

On a donc $\displaystyle\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$. □

Proposition 10.1.6 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit f et g dans $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{K})$. Alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

Un échange de a et b ne modifiant pas la proposition, on peut supposer $a \leqslant b$.

Dans un premier temps, on suppose que f et g sont à valeurs réelles.

Pour tout réel λ, on pose $\displaystyle P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,\mathrm{d}x = \lambda^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

La fonction $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est (par définition) à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et elle est polynomiale de degré $\leqslant 2$.

Si $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$, le signe constant de P exige que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (et Cauchy-Schwarz est vérifié).

Si $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ (donc > 0), alors P est un polynôme de degré 2 qui garde un signe constant.

Son discriminant Δ est donc négatif ou nul, et écrire $\Delta \leqslant 0$ c'est écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour le cas d'égalité, il faut supposer que f, g sont *continues* de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On trouve alors qu'il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles sur $[a,b]$ (cours de première année).

Quand f et g sont à valeurs complexes, il suffit d'utiliser l'inégalité de la moyenne, puis d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions réelles $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto |g(x)|$.

Ainsi $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$ et c'est fini. □

Exercice 10.4 (⇝ **corrigé**)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{K})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.

Exercice 10.5 (⇝ **corrigé**)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$, avec $f(1) = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = -f'(1)$.

Définition 10.1.7 (valeur moyenne d'une fonction)

Soit f dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$. Soit a et b deux éléments de I.

La quantité $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée *valeur moyenne* de f sur le segment $[a,b]$.

Remarques

– Si f est à valeurs réelles, on a l'encadrement : $\displaystyle\inf_{[a,b]}(f) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{[a,b]}(f)$.

– Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, il existe c dans $[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)f(c)$.

– La valeur moyenne λ de f sur le segment $[a,b]$ vérifie l'égalité $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lambda\,\mathrm{d}t$.

C'est donc le scalaire par lequel on peut remplacer f sans changer son intégrale sur $[a,b]$.

Proposition 10.1.7 (rappel : sommes de Riemann d'une fonction continue sur un segment)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit n un entier strictement positif.

La quantité $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\dfrac{b-a}{n}\Big)$ *est appelée* somme de Riemann *d'indice n de f sur $[a, b]$.*

Avec ces notations, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans ce résultat, on peut remplacer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}$ par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ ou par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$: cela ne change rien.

Si f est à valeurs réelles, la quantité $R_n(f)$ est la somme des aires algébriques des rectangles de base $[x_k, x_{k+1}]$ de hauteur $f(x_k)$. Il est « clair » que lorsque n tend vers $+\infty$, la somme $R_n(f)$ tend vers l'aire algébrique comprise entre l'axe Ox et la courbe $y = f(x)$, c'est-à-dire vers l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Exemple : si $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$, alors $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\dfrac{b-a}{n}\Big)$, où $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$.

Exercice 10.6 (⇝ **corrigé**)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{(2n)!}{n!}\Big)^{1/n}$.

Exercice 10.7 (⇝ **corrigé**)

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$, et soit n dans $\mathbb{N}^*$. On pose $M_3 = \displaystyle\sup_{[a,b]} \left|f^{(3)}\right|$.

On pose $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\dfrac{b-a}{n}\Big)$. On définit de même $S_n(f')$ et $S_n(f'')$.

a) Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f) - \dfrac{b-a}{2n}S_n(f') - \dfrac{(b-a)^2}{6n^2}S_n(f'')\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^4}{24n^3}M_3$

b) Prouver que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_n(f) + \dfrac{b-a}{2n}\big(f(b) - f(a)\big) - \dfrac{(b-a)^2}{12n^2}\big(f'(b) - f'(a)\big) + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$

Exercice 10.8 (⇝ **corrigé**)

a) On suppose $x \neq \pm 1$. Justifier l'existence de $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t$.

b) Prouver la factorisation $X^{2n} - 1 = (X^2 - 1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\Big(X^2 - 2X\cos\Big(\dfrac{k\pi}{n}\Big) + 1\Big)$.

c) En utilisant des sommes de Riemann, calculer $I(x)$ pour $|x| < 1$ et pour $|x| > 1$.

▷ Utilisation d'une translation, de la parité, de la périodicité

On suppose ici que f est continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Soit a, b dans I et α dans $\mathbb{R}$ tels que $[a, b] \subset I$ et $[a+\alpha, b+\alpha] \subset I$.
  On a la propriété dite « invariance de l'intégrale par translation » : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(t-\alpha)\,\mathrm{d}t$.
- On suppose que l'intervalle I est symétrique par rapport à l'origine. Soit a un point de I.
  Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$. Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

– On suppose que f est T-périodique. Pour tous réels a et b, on a $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif k, on a l'égalité : $\displaystyle\int_{a+kT}^{b+kT} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10.9 (⇝ **corrigé**)

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{3\pi} \sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\ \mathrm{d}x$.

10.2 Intégrales généralisées

10.2.1 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Définition 10.2.1 (intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

On considère la fonction $F\colon [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ définie par : $\forall\, x \geqslant a,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On suppose que F possède une limite finie ℓ dans $\mathbb{K}$ quand $x \to +\infty$.

On dit alors que l'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*, et on pose $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$.

Si F n'a pas de limite finie quand $x \to +\infty$, on dit que l'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge*.

On parle d'intégrale *convergente* ou *divergente*. On ne donne pas de valeur à une intégrale divergente.

On traitera souvent les deux problèmes successivement : d'abord déterminer la *nature* (convergente ou divergente) de l'intégrale, puis le cas échéant calculer sa valeur (il arrive souvent qu'on puisse prouver la convergence sans qu'on sache calculer la valeur ou sans qu'on ne nous le demande).

Avec les notations précédentes, si $c > a$ les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

En cas de convergence, on a alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Le choix de a n'est donc pas très important pour la nature de l'intégrale, mais il l'est pour sa valeur !

Exercice 10.10 (⇝ **corrigé**)

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)(t+3)}$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 10.11 (⇝ **corrigé**)

Étudier l'existence, et calculer éventuellement la valeur, de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t$, avec $n \geqslant 1$.

Exercice 10.12 (⇝ **corrigé**)

On pose $F_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^n(t)}$, avec $n \geqslant 1$.

1. Pouver la convergence des intégrales F_1 et F_2, et calculer leurs valeurs.
2. Pouver la convergence de F_n pour tout $n \geqslant 1$, et proposer une relation de récurrence.

3. Calculer F_{2n} (pour $n \geqslant 1$) et F_{2n+1} (pour $n \geqslant 0$).

Proposition 10.2.1 (cas des fonctions à valeurs réelles positives)
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, à valeurs réelles positives.
Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

Dans la proposition précédente, on a bien sûr : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x \geqslant a} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction $F\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie : $\forall\, x \geqslant a,\ \forall\, y \geqslant x,\ F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
Étant croissante sur $[a, +\infty[$, elle admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée.
Si tel est le cas, cette limite est la borne supérieure des valeurs prises par F sur $[a, +\infty[$. □

Proposition 10.2.2 (cas des fonctions à valeurs complexes)
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux, à valeurs complexes.
Soit $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}\ (f)$ les fonctions « partie réelle » et « partie imaginaire » de f.
Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
En cas de convergence, on a l'égalité : $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t + i \int_a^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t$

C'est évident. Tout comme f, les applications u et v sont continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.
Pour tout $x \geqslant a$, posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ U(x) = \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t$, et $V(x) = \int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t$.
On a $U = \mathrm{Re}(f)$, $V = \mathrm{Im}\ (f)$. On sait que la fonction F possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si c'est le cas des fonctions U et V, et qu'alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} U(x) + i \lim\limits_{x\to+\infty} V(x)$. □

Exercice 10.13 (⇝ **corrigé**)
Prouver l'existence et calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - i}$.

10.2.2 Intégrale sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert

Définition 10.2.2 (intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur $]-\infty, b]$)
Soit $f\colon]-\infty, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux (avec b dans $\mathbb{R}$).
Si $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{K}$, on dit $\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*, et on pose $\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$.

On peut ici faire des remarques analogues à celles qui ont suivi la définition 10.2.1.

Définition 10.2.3 (intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur $[a, b[$)
Soit $f\colon [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, avec a, b réels et $a < b$.
Si $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{K}$, on dit $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*, et on pose $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$.

Cette définition n'a d'utilité que si f n'est **pas** continue par morceaux sur $[a,b]$ (exemple $\lim\limits_{b} f=\infty$).
Mais si f **est** continue par morceaux sur $[a,b]$, il n'y a pas d'ambiguïté.
En effet, dans ce cas, l'application $F\colon x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$.
Si f **est** continue par morceaux sur $[a,b]$, on évitera de parler d'intégrale *généralisée* et de *convergence*.
La définition 10.2.3 est compatible avec la définition 10.2.1 si on remplace le réel b par $+\infty$.

Définition 10.2.4 (intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur $]a,b]$)
Soit $f\colon]a,b]\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t=\ell\in\mathbb{K}$, on dit $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*, et on pose $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\ell$.

On peut faire des remarques analogues à celles qui ont suivi la définition 10.2.3.
En particulier, la définition 10.2.4 est compatible avec la définition 10.2.2 si on remplace a par $-\infty$.

Définition 10.2.5 (intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur $]a,b[$)
Soit $f\colon]a,b[\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, avec $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.
On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* s'il existe c dans $]a,b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Dans ces conditions, on pose $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans cette définition, on vérifie que ni l'existence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ni sa valeur ne dépendent du point c.
On a supposé dans cette dernière définition que f n'est continue par morceaux ni sur $[a,b[$, ni sur $]a,b]$, ni évidemment sur $[a,b]$ (sinon on est ramené à des définitions précédentes).
On se place donc dans la situation où il se pose une « question de convergence » à la fois en a et en b.
On retiendra que ces deux questions doivent être traitées séparément (et il n'est pour cela pas nécessaire d'utiliser le même point intermédiaire c dans l'intervalle $]a,b[$).
Ce n'est qu'après avoir répondu à ces deux questions qu'on peut rechercher la *valeur* de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Dans les questions de convergence d'une intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on suppose toujours $a<b$.

Exercice 10.14 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Justifier l'existence et calculer la valeur de $I=\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}}$.

Exercice 10.15 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale $J=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$.

Exercice 10.16 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Justifier l'existence et donner la valeur de $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Proposition 10.2.3 (cas d'une fonction positive)
Soit $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si : $\exists\, M \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, [\alpha,\beta] \subset]a,b[,\ \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$.
Plus précisément, en cas de convergence, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{[\alpha,\beta]\subset]a,b[} \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$.

On va noter $J_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout sous-segment $[\alpha,\beta]$ de $]a,b[$.

Le résultat découle des remarques suivantes, où c désigne un point fixé de $]a,b[$:

- Pour tout sous-segment $[\alpha,\beta]$ de $]a,b[$ (avec $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$) on a : $J_{\alpha,\beta} = J_{\alpha,c} + J_{c,\beta}$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la famille des $J_{\alpha,c}$ est majorée.

  De même, l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la famille des intégrales $J_{c,\beta}$ est majorée.
- La famille des intégrales $J_{\alpha,\beta}$ est majorée si et seulement si il en est de même (séparément) des familles $J_{\alpha,c}$ et $J_{c,\beta}$ (c'est une conséquence du fait que toutes les intégrales sont ici positives).
- En cas de convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on peut ajouter la remarque suivante :

  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{\alpha\in]a,b[} \int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t + \sup_{\beta\in]a,b[} \int_c^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{[\alpha,\beta]\subset]a,b[} \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  On peut ici regrouper les deux bornes supérieures car elles sont considérées séparément. □

10.2.3 Intégrales de référence

Proposition 10.2.4 (convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$)
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où α est un nombre réel, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Dans le cas $\alpha > 1$, la valeur de cette intégrale est $\dfrac{1}{\alpha-1}$.

C'est beaucoup plus la *nature* de cette intégrale qui est importante que sa *valeur* éventuelle.
Le résultat précédent peut aussi s'énoncer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

- Supposons $\alpha \neq 1$.

  Pour tout $x \geqslant 1$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \Big[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_{t=1}^{t=x} = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1)$.

  La fonction F n'a de limite finie en $+\infty$ que si $\alpha > 1$. Dans ce cas : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{\alpha-1}$.
- Supposons $\alpha = 1$.

  Pour $x \geqslant 1$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente. □

Proposition 10.2.5 (convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$)
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où α est un nombre réel, est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Dans le cas $\alpha < 1$, la valeur de cette intégrale est $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

Là aussi, le résultat porte essentiellement sur la *nature* de l'intégrale.

Le résultat précédent peut aussi s'énoncer : $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

– Supposons $\alpha \neq 1$.

Pour tout x de $]0,1[$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \Big[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_{t=x}^{t=1} = \frac{1}{1-\alpha}(1-x^{1-\alpha})$.

La fonction F n'a de limite finie en 0 que si $\alpha < 1$. Dans ce cas : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{1}{1-\alpha}$.

– Supposons $\alpha = 1$.

Pour tout x de $]0,1[$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$: l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente. □

Remarque : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (doublement généralisée) n'est *jamais* convergente !

Par une simple translation, le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 10.2.5 :

Proposition 10.2.6 (convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$)

Soit α un nombre réel. Soit a, b deux réels, avec $a < b$.

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ sont convergentes si et seulement si $\alpha < 1$.

Les deux intégrales qui suivent ne sont pas considérées comme des « intégrales de référence » mais elles doivent être connues :

Proposition 10.2.7 (convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$)

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et sa valeur est -1.

Pour $0 < x \leqslant 1$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln(t) - t\Big]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$.

Ainsi l'intégrale (généralisée en 0) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et sa valeur est -1. □

Proposition 10.2.8 (convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$)

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) converge si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas, sa valeur est $\dfrac{1}{\alpha}$.

Évident. Si $\alpha \neq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha}\Big[\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha}$ (si $\alpha > 0$). □

▷ **Quelques intégrales généralisées célèbres**

– L'intégrale de Gauss (1809) : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, ou encore $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si $a > 0$.

– Deux intégrales d'Euler (1769) : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.
– Deux intégrales de Lejeune-Dirichlet (1829) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
– Deux intégrales de Fresnel (1818) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

10.2.4 Propriétés des intégrales généralisées

Rappel : $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$-espace des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Dans les propositions suivantes, on se place sur un intervalle d'extrémités a, b, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Proposition 10.2.9 (linéarité pour les intégrales généralisées)
Soit f et g dans $\mathcal{C}_m(]a,b[,\mathbb{K})$, et soit α et β deux scalaires.
On suppose que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

La propriété précédente admet bien des cas particuliers.
– on a pris des hypothèses de « continuité par morceaux » sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, mais le résultat reste évidemment vrai avec les mêmes hypothèses mais sur $[a,b[$ ou $]a,b]$.
– ce qui est important c'est qu'il y ait une intégrale généralisée « quelque part » (concernant les bornes : en a ou en b ou les deux, et concernant les fonctions : pour f ou pour g ou les deux).
– il est même possible que les intégrales de f et de g soient généralisées mais que celle de $\alpha f+\beta g$ ne le soit pas (bien sûr l'égalité entre les intégrales reste valable !).

Pour simplifier, on suppose que f et g sont continues par morceaux sur $[a,b[$ (les intégrales sont donc généralisées en b, et uniquement en b). Les autres cas se traitent de façon similaire.

On se donne α,β dans $\mathbb{K}$, et on pose $h=\alpha f+\beta g$. La fonction h est continue par morceaux sur $[a,b[$.

Pour tout x de $[a,b[$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $G(x)=\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ et $H(x)=\displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

Par linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$, on a : $\forall x\in[a,b[,\ H(x)=\alpha F(x)+\beta G(x)$.

Par hypothèse, F et G possèdent une limite finie en b. Il en est donc de même pour H.

Plus précisément : $\displaystyle\lim_{x\to b} H(x) = \alpha\lim_{x\to b} F(x) + \beta\lim_{x\to b} G(x)$, donc $\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. □

Proposition 10.2.10 (positivité et croissance pour les intégrales généralisées)
Soit f et g dans $\mathcal{C}_m(]a,b[,\mathbb{R})$, telles que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
– si f est positive ou nulle sur $]a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).
– si $f\leqslant g$ sur $]a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (croissance de l'intégrale).

Pour simplifier, on suppose que f et g sont continues par morceaux sur $[a,b[$.
– Si $f\geqslant 0$ sur $[a,b[$, alors $\forall x\in[a,b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$, donc : $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

– Si $f \leqslant g$ (donc $g - f \geqslant 0$) sur $[a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. □

Proposition 10.2.11 (relation de Chasles pour les intégrales généralisées)
Soit f dans $\mathcal{C}_m(]a, b[, \mathbb{R})$, et soit c dans $]a, b[$. On suppose que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si on part de l'hypothèse de convergence de l'intégrale de f sur $]a, b[$, alors la convergence des intégrales de f sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$ est acquise (et on a bien sûr l'égalité).

Pour simplifier, on suppose que f est continue par morceaux sur $[a, b[$.
Pour tout x de $[c, b[$, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Le résultat est alors immédiat par passage à la limite quand x tend vers b.

10.2.5 Calcul des intégrales généralisées

▷ Utilisation d'un changement de variable

Proposition 10.2.12 (rappel : intégration par changement de variable, sur un segment)
Soit $f\colon I \to \mathbb{K}$ une fonction ***continue****.*
Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur un intervalle J, à valeurs dans I.
Alors, pour tous points α et β de J, on a : $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit F une primitive de f sur I (puisque f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$).
Par composition, la fonction $G = F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et $G' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$.
Pour tous points α et β de J, on a alors :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta G'(u)\,\mathrm{d}u = \Big[G(u)\Big]_\alpha^\beta = \Big[(F \circ \varphi)(u)\Big]_\alpha^\beta = \Big[F(t)\Big]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$ □

Si on note $g = (f \circ \varphi)\varphi'$, on a donc $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, à la seule condition que $\begin{cases} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{cases}$

L'égalité précédente peut se lire « dans les deux sens » :

a) On part de l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(u)\,\mathrm{d}u$, et on observe que $g(u)$ peut s'écrire $f(\varphi(u))\varphi'(u)$.
 On pose alors le changement de variable $t = \varphi(u)$, et on écrit : $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.
 On note que lorsque u vaut α (resp. β), $t = \varphi(u)$ vaut $a = \varphi(\alpha)$ (resp. $b = \varphi(\beta)$).
 Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(u)\,\mathrm{d}u$ devient $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ puis $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
 On voit à l'évidence que le changement de variable φ n'a pas « besoin » d'être bijectif.

b) Inversement, on peut partir de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et poser $t = \varphi(u)$, donc $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.
 Il faut maintenant « remonter » à deux éléments α, β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.
 Il peut alors s'avérer commode que le changement de variable φ soit bijectif, de manière à déterminer les réels $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ et $\beta = \varphi^{-1}(b)$ sans ambiguïté (mais ça n'est pas une obligation !).

Dans le cas fréquent où le changement de variable φ est une bijection de $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$) sur $[a, b]$ (avec $a < b$) on peut réécrire la proposition 10.2.12 de deux manières, selon que φ est strictement croissante (donc $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$) ou strictement décroissante (donc $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$) :

a) Si φ est strictement croissante, donc si $\begin{cases} a = \varphi(\alpha) \\ b = \varphi(\beta) \end{cases}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

b) Si φ est strictement décroissante, donc si $\begin{cases} a = \varphi(\beta) \\ b = \varphi(\alpha) \end{cases}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha (f \circ \varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

c) Il est intéressant de noter qu'on peut grouper les deux cas précédents de la façon suivante.

On suppose ici que φ est bijective de $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$) sur $[a, b]$ (avec $a < b$), et de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors (indépendamment de la monotonie de φ) : $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[\alpha,\beta]} (f \circ \varphi)(u)\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$.

La proposition ci-dessous étend ce qui vient d'être dit au cas d'un changement de variable dans l'intégrale sur un segment $[a, b]$ d'une fonction f *continue par morceaux* sur ce segment.

Proposition 10.2.13 (changement de variable sur un segment, cas « continu par morceaux »)

*Soit $f \colon [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction **continue par morceaux**, avec $a < b$.*

Soit φ une bijection strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$, de $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$) sur $[a, b]$.

Alors on l'égalité : $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $(t_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on pose $u_k = \varphi^{-1}(t_k)$.

$\varphi \colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ étant bijective strictement croissante, la suite $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une subdivision de $[\alpha, \beta]$.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on note $T_k = [t_k, t_{k+1}]$ et $\mathring{T}_k =]t_k, t_{k+1}[$. On note aussi $U_k = [u_k, u_{k+1}]$ et $\mathring{U}_k =]u_k, u_{k+1}[$.

On note f_k le prolongement continu à T_k de la restriction de f à $\mathring{T}_k$.

Avec ces notations, il est clair que φ induit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de U_k (resp. $\mathring{U}_k$) sur T_k (resp. $\mathring{T}_k$).

Pour chaque entier k de $[\![0, n-1]\!]$:

- Par composition, la fonction $g = (f \circ \varphi)\varphi'$ est continue sur chaque intervalle ouvert $\mathring{U}_k$.
- La restriction de g à $\mathring{U}_k$ se prolonge en la fonction continue $g_k = (f_k \circ \varphi)\varphi'$ sur U_k.
- On a l'égalité : $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u_k}^{u_{k+1}} (f_k \circ \varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{u_k}^{u_{k+1}} g_k(u)\,\mathrm{d}u$.

Ainsi l'application $g = (f \circ \varphi)\varphi'$ est continue par morceaux sur $[\alpha, \beta]$, et on a :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta g(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} g_k(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \square$$

Si φ est seulement supposée bijective de $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$) sur $[a, b]$ (avec $a < b$), et si elle est indifféremment strictement croissante ou strictement décroissante, alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$.

On va maintenant généraliser ce qui précède à l'intégrale généralisée d'une fonction f continue par morceaux sur un intervalle quelconque $]a, b[$.

Dans les énoncés suivants, il faut considérer que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et que $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

Proposition 10.2.14 (changement de variable strictement croissant et intégrales généralisées)
Soit $f\colon]a,b[\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
Soit φ une bijection strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$, de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$.
Alors l'application $(f\circ\varphi)\,\varphi'$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$.
Dans ces conditions, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
En cas de convergence, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

On fixe un point c dans $]a,b[$, et on note $\gamma=\varphi^{-1}(c)$ le point correspondant de l'intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$.
On se donne $\hat{a},\hat{b}$ quelconques dans $]a,b[$, avec $\hat{a}<c<\hat{b}$.
On note $\hat{\alpha}=\varphi^{-1}(\hat{a})$ et $\hat{\beta}=\varphi^{-1}(\hat{b})$ (et on a $\alpha<\hat{\alpha}<\gamma<\hat{\beta}<\beta$ car φ est strictement croissante).
On sait (proposition 10.2.13) que : $\displaystyle\int_{\hat{a}}^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\hat{\alpha}}^\gamma (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_c^{\hat{b}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma^{\hat{\beta}} (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.
Quand $\hat{a}$ tend vers a (resp. quand $\hat{b}$ tend vers b), alors $\hat{\alpha}$ tend vers α (resp. $\hat{\beta}$ tend vers β).

– Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, c'est dire que $\displaystyle\lim_{\hat{a}\to a}\int_{\hat{a}}^c f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$.
  Cela équivaut donc à la convergence de $\displaystyle\int_\alpha^\gamma (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, et il y a alors égalité des deux intégrales.
– Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, c'est dire que $\displaystyle\lim_{\hat{b}\to b}\int_c^{\hat{b}} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$.
  Cela équivaut donc à la convergence de $\displaystyle\int_\gamma^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, et il y a alors égalité des deux intégrales.

En conclusion, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
Et en cas de convergence, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Exercice 10.17 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)
Justifier l'existence, et donner la valeur de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Dans la proposition 10.2.14, on s'est placé sur des intervalles ouverts, mais cela ne signifie pas que la question de la convergence se pose aux deux extrémités. On peut donc réécrire cette proposition de façon évidente (mais toujours en supposant que φ est strictement croissante) :
– en remplaçant les intervalles ouverts $]a,b[$ et $]\alpha,\beta[$ par les intervalles semi-ouverts $[a,b[$ et $[\alpha,\beta[$;
– en remplaçant les intervalles ouverts $]a,b[$ et $]\alpha,\beta[$ par les intervalles semi-ouverts $]a,b]$ et $]\alpha,\beta]$.

La proposition 10.2.14 possède une version avec un changement de variable φ strictement décroissant :

Proposition 10.2.15 (changement de variable strictement *décroissant* et intégrales généralisées)
Soit $f\colon]a,b[\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, avec $a<b$.
Soit $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$, $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement décroissante (donc $\alpha<\beta$, et $\lim\limits_\alpha\varphi=b>\lim\limits_\beta\varphi=a$).
Alors l'application $(f\circ\varphi)\,\varphi'$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$.
Dans ces conditions, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
En cas de convergence, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Remarques

- Les propositions 10.2.14 et 10.2.15 peuvent se regrouper en $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$.
- Il est plus prudent de ne retenir que la proposition 10.2.14.
- Il est encore plus prudent d'effectuer le changement de variable dans une intégrale non généralisée et de passer à la limite ensuite : $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha')}^{\varphi(\beta')} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha'}^{\beta'} (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ puis $\begin{cases}\alpha'\to\alpha\\ \beta'\to\beta\end{cases}$
- On peut aussi retenir $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, où $\begin{cases}\text{« }\varphi(\alpha)\text{ »} & \text{signifie } \lim\limits_{u\to\alpha}\varphi(u)\\ \text{« }\varphi(\beta)\text{ »} & \text{signifie } \lim\limits_{u\to\beta}\varphi(u)\end{cases}$

  dans cette égalité, les bornes $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ sont « dans le bon ordre » si φ est croissante (et pas dans le bon ordre sinon, d'où le changement de signe dans la proposition 10.2.15 car on suppose qu'en matière d'intégrales généralisées on doit écrire les bornes dans le « bon ordre »...)

Exercice 10.18 (⇝ **corrigé**)

Montrer que les intégrales $\displaystyle J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ et $\displaystyle K = \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3+1}$ sont de même nature, puis les calculer.

Proposition 10.2.16 (intégration par parties pour les intégrales généralisées)

Soit f et g, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que fg possède des limites finies en a et en b. On note $\Big[fg\Big]_a^b = \lim\limits_b(fg) - \lim\limits_a(fg)$.
Dans ces conditions, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
En cas de convergence, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

On se place sur un sous-segment quelconque $[\alpha,\beta]$ de l'intervalle $]a,b[$.
On connait l'égalité : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = (fg)(\beta)-(fg)(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ $(\star)$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, on fait tendre (séparément !) α vers a et β vers b dans $(\star)$.
On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$, et l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_b(fg) - \lim_a(fg) - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Compte tenu de la symétrie des rôles de f et g, la proposition 10.2.16 est démontrée. □

Remarque : il est souvent prudent d'effectuer l'intégration par parties dans une intégrale non généralisée avant de passer à la limite (en justifiant l'existence des limites, précisément).

Exercice 10.19 (⇝ **corrigé**)

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10.20 (⇝ **corrigé**)

Montrer que l'intégrale $\displaystyle K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$ (avec $n \geqslant 1$) est convergente et calculer sa valeur.

10.3 Fonctions intégrables

10.3.1 Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables

Dans les énoncés suivants on se place sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
Les énoncés restent encore valables sur un intervalle semi-ouvert $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$.

Rappelons que si f est continue par morceaux sur I, il en est de même de $|f|$, de f^+, et de f^-.

Définition 10.3.1 (intégrale absolument convergente)
Soit $f\colon]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Proposition 10.3.1 (la convergence absolue implique la convergence)
Soit $f\colon]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente et $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

- On commence par traiter le cas où f est à valeurs réelles. On rappelle les notations $\begin{cases} f^+ = \max(f, 0) \\ f^- = \max(-f, 0) \end{cases}$

  Les fonctions f^+ et f^- vérifient $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$ et $\begin{cases} 0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \\ 0 \leqslant f^- \leqslant |f| \end{cases}$ et sont continues par morceaux.

  Par domination, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$.

  Par combinaison linéaire, il en résulte la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

  Pour tout $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, l'inégalité $\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est bien connue.

  Quand α tend vers a, puis quand β tend vers b, il en résulte $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

- On suppose maintenant que f est à valeurs complexes.

  Les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$, continues par morceaux, vérifient $|\mathrm{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $|\mathrm{Im}\,(f)| \leqslant |f|$.

  Par domination, la convergence de $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ implique donc celle de $\displaystyle\int_a^b |\mathrm{Re}(f(t))|\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b |\mathrm{Im}\,(f(t))|\,\mathrm{d}t$.

  Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}\,(f(t))\,\mathrm{d}t$, absolument convergentes, sont donc convergentes.

  Par combinaison linéaire, il en résulte la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

  On obtient $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ quand $\begin{cases} \alpha \to a \\ \beta \to b \end{cases}$ dans $\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t$. □

Définition 10.3.2 (fonction intégrable sur un intervalle)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit f dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

On dit que f est *intégrable* sur I si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *absolument convergente*.

La valeur de cette intégrale est notée $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$, ou plus simplement $\displaystyle\int_I f$.

Proposition 10.3.2 (définition équivalente de l'intégrabilité sur un intervalle)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit f dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
– *la fonction f est* intégrable *sur I ;*
– *il existe $M \geqslant 0$ tel que, pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, on ait $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M$.*

C'est évident d'après la proposition 10.2.3 et les définitions 10.3.1 et 10.3.2 □

Remarques

– L'intérêt de la notion de fonction intégrable, en liaison avec la proposition 10.3.1, est qu'on peut se « concentrer » sur les propriétés des fonctions positives.
– Si f est continue par morceaux sur le *segment* $[a, b]$, alors elle y est évidemment intégrable, et il n'y a pas de contradiction dans les notations de l'intégrale (cf sous-section 10.1.2) !
– On retiendra cette évidence : dire que f est intégrable sur I, c'est dire que $|f|$ est intégrable sur I. De même, si f est à valeurs réelles : f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont.
– Dans le même ordre d'idée, si f est à valeurs réelles et garde un signe constant, il n'y a aucune différence entre l'intégrabilité de f sur $I =]a, b[$ (ou $[a, b[$, ou $]a, b]$) et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
– Si f est à valeurs complexes, elle est intégrable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}\ (f)$ le sont.
De la même manière (et c'est évident) : f est intégrable sur I si et seulement si $\overline{f}$ l'est.

▷ Un exemple important

Il est possible que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente mais qu'elle ne soit pas *absolument convergente*.
L'exemple le plus classique est donné par $f\colon t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$, qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On montre en effet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, mais que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

10.3.2 Intégrabilité et relations de comparaison

Proposition 10.3.3 (intégrabilité par majoration)
Soit f et g, continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si on a $|f| \leqslant |g|$, et si g est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

On sait qu'il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \geqslant a$, $\displaystyle\int_a^x |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M$ (voir proposition 10.2.1).
On a alors : $\forall x \geqslant a$, $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M$, et l'existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ en découle.
Conclusion : si f est dominée par g intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$. □

Remarques

– en généralité, la propriété précédente est utilisée avec une fonction positive g.

– pour que le résultat soit vrai, il suffit que l'inégalité $|f| \leqslant |g|$ soit vraie « à partir d'un certain point » ; mais alors rien ne permet de comparer les valeurs des intégrales sur $[a, +\infty[$ (d'ailleurs ce n'est certainement pas le but : il s'agit essentiellement de prouver l'intégrabilité de f connaissant celle de g).

– par contraposition, toujours avec $|f| \leqslant |g|$, la non-intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ implique celle de g.

Proposition 10.3.4 (intégrabilité par domination)
Soit f et g, continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$, et si g est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Par hypothèse, il existe K dans $\mathbb{R}^+$ et un réel $c \geqslant a$ tels que : $\forall t \geqslant c,\ |f(t)| \leqslant K\,|g(t)|$.

L'existence de $\displaystyle\int_c^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ implique alors celle de $\displaystyle\int_c^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ donc l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$. □

Remarque : le résultat précédent est vrai, a fortiori, si $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition 10.3.5 (intégrabilité et équivalence des fonctions)
Soit f et g, continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si $|f| \sim |g|$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de g.

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \geqslant a$ tel que : $\forall t \geqslant c,\ \big|\,|f(t)| - |g(t)|\,\big| \leqslant \varepsilon\,|g(t)|$.

On choisit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. On en déduit l'existence de $c \geqslant a$ tel que : $\forall t \geqslant c,\ \dfrac{1}{2}\,|g(t)| \leqslant |f(t)| \leqslant \dfrac{3}{2}\,|g(t)|$.

On a ainsi à la fois $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{O}(f)$ au voisinage de $+\infty$.

En utilisant la proposition 10.3.4, l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ équivaut donc à celle de g. □

Remarque : on peut remplacer l'hypothèse $|f| \sim |g|$ par $|f| \sim \lambda\,|g|$, avec $\lambda > 0$, sans changer le résultat.

▷ Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Les propositions 10.3.3, 10.3.4 et 10.3.5 ont été énoncées sur un intervalle $[a, +\infty[$, mais elles possèdent une réécriture immédiate sur chaque type d'intervalle : $]-\infty, a[$, ou $]a, b]$, ou $[a, b[$, ou $]a, b[$.

Par exemple, dit de façon très générale : soit f, g dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$: si $f = \mathrm{O}(g)$ en *la* ou *les* bornes de I en lesquelles se pose un « problème d'intégrabilité », alors l'intégrabilité de g sur I implique celle de f.

Proposition 10.3.6 (si f est continue intégrable, conséquence de la nullité de l'intégrale de $|f|$)
Soit $f\colon I \to \mathbb{K}$, continue et intégrable sur I. Si $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur I.

Soit $[\alpha, \beta]$ un segment quelconque inclus dans I.

L'hypothèse implique $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$ (cf prop. 10.2.3), donc $f \equiv 0$ sur $[\alpha, \beta]$ (cours de première année).

Comme cela est vrai pour tout sous-segment de I, il en résulte que f est identiquement nulle sur I. □

Proposition 10.3.7 (structure d'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions intégrables sur I)
L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Soit λ, μ deux scalaires, et f, g deux fonctions intégrables sur I.
Alors la fonction $h = \lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur I, et $|h| \leqslant |\lambda|\,|f| + |\mu|\,|g|$.
Par combinaison linéaire, l'intégrale $\int_I (|\lambda|\,|f| + |\mu|\,|g|)$ est convergente (cf prop.10.2.9).
Il en résulte que $h = \lambda f + \mu g$ est intégrable sur I. □

Remarque : on note souvent $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'application $f \mapsto \int_I f$ est bien sûr une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

▷ Utilisation des intégrales de référence

- Pour juger de l'intégrabilité sur $]a, b]$:

  On va utiliser 10.3.2 pour la convergence de $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$, et 10.3.4 pour l'intégrabilité par domination.

  Soit a et b deux nombres réels, avec $a < b$.

  Soit $f :]a, b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux (le « problème d'intégrabilité » se trouve donc en a)

  – Si $(x-a)^\alpha f(x)$ est bornée au voisinage de a avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.
    C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha < 1$).
    Exemple : la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$.

  – Si $|(x-a)f(x)| \geqslant M > 0$ au voisinage de a, alors f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.
    C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x\to a^+} (x-a)f(x) = \lambda \neq 0$.
    Exemple : la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x) = \infty$.

- Pour juger de l'intégrabilité sur $[a, +\infty[$

  On va utiliser 10.2.4 pour la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et 10.3.4 pour l'intégrabilité par domination.

  Soit a un nombre réel, et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$, continue par morceaux.

  – Si $x^\alpha f(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
    C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ (toujours avec $\alpha > 1$).
    Exemple : la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 0$.

  – Si $|xf(x)| \geqslant M > 0$ au voisinage de $+\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.
    C'est le cas en particulier si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \lambda \neq 0$.
    Exemple : la fonction $x \mapsto \dfrac{\tanh(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 1$.

Exercice 10.21 (un exemple important ! ⇝ **corrigé**)

1. En intégrant par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (on ne demande pas sa valeur !).
2. Montrer cependant que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (indication : considérer les $x_k = k\pi$).

Proposition 10.3.8 (la fonction Gamma d'Euler)

La fonction Gamma d'Euler est définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. *Son domaine de définition est* $\mathbb{R}^{+*}$.

On a la relation fondamentale : $\forall\, x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On a $\Gamma(1) = 1$, *et plus généralement :* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$. *On a aussi* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1. La fonction $f\colon t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

   On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = \lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$: f est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

   Enfin on a $f(t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$. La fonction f est donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$.

   Conlusion : $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$.
2. On suppose $x > 0$ et on intègre $\Gamma(x+1)$ par parties (en dérivant t^x par rapport à t) :

   $$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[-t^x\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty}}_{=0} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. De plus $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

   Une récurrence évidente donne alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.
3. Dans l'intégrale $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 1$, on pose $u = \sqrt{t}$, donc $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.

   Ainsi $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss). □

▷ Les intégrales de Bertrand (pas au programme, mais utile)

Pour tous réels α et β, on considère l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha\,|\ln(t)|^\beta}$ sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ ou sur $]2, +\infty[$.

– l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,|\ln(t)|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

– l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,\ln^\beta(t)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

▷ la fonction Beta d'Euler (pour la culture générale)

La fonction Beta d'Euler : $\mathrm{B}(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$, est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

On montre facilement : $B(x, y) = B(y, x)$, $B(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}B(x, y)$, $B(m+1, n+1) = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$.

Exercice 10.22 (⇝ **corrigé**)

Étudier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 |1 - x^\alpha|^\beta \, \mathrm{d}x$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 10.23 (⇝ **corrigé**)

Étudier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 10.24 (⇝ **corrigé**)

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 10.25 (⇝ **corrigé**)

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 10.26 (⇝ **corrigé**)

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin(x) \, \mathrm{d}x$.

10.3.3 Fonctions de carré intégrable

Définition 10.3.3 (fonction de carré intégrable)
Soit $f \colon I \to \mathbb{K}$, continue par morceaux.
On dit que f est *de carré intégrable* sur I si la fonction f^2 est intégrable sur I.

Rappelons que l'intégrabilité de f^2, c'est la même chose que l'intégrabilité de $|f|^2$.

▷ Intégrabilité et « carré intégrabilité »

Soit $f \colon I \to \mathbb{K}$, continue par morceaux. Tous les cas sont possibles :

– il se peut que f soit intégrable et de carré intégrable, comme $f \colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

– il se peut que f soit intégrable, mais pas de carré intégrable, comme $f \colon x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, 1]$.

– il se peut que f ne soit pas intégrable, mais soit de carré intégrable, comme $f \colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

– il se peut que f ne soit ni intégrable, ni de carré intégrable, comme $f \colon x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$.

Proposition 10.3.9 (produit de deux fonctions de carré intégrable)
Soit f et g, de I dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux et de carré intégrable sur I.
Alors la fonction produit fg est intégrable sur I.
De plus, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\left(\int_I |fg|\right)^2 \leqslant \int_I |f|^2 \int_I |g|^2$.

Pour tous x, y de $\mathbb{R}^+$ on a $0 \leqslant xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$, et en particulier : $\forall x \in I,\ |f(x)g(x)| \leqslant \dfrac{|f^2(x)|+|g^2(x)|}{2}$.
Les fonctions f^2 et g^2 étant intégrables sur I, l'intégrabilité de fg sur I en résulte (par domination).

On se donne un segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans $]a, b[$, avec α, β.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $|f|$ et $|g|$ sur $[\alpha, \beta]$ (voir la proposition 10.1.6).

On trouve : $\left(\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_\alpha^\beta |f^2(x)|\,\mathrm{d}x \int_\alpha^\beta |g^2(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I |f|^2 \int_I |g|^2$

Cette inégalité étant vraie pour tout segment $[\alpha, \beta]$ de I, on en déduit : $\left(\displaystyle\int_I |fg|\right)^2 \leqslant \int_I |f|^2 \int_I |g|^2$.

Proposition 10.3.10 (espace de l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I)
L'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Tout d'abord la fonction nulle est évidemment intégrable sur I.

Ensuite, soit f et g de carré intégrable sur I, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a $(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda\mu fg + \mu^2 g^2$.

Les fonctions f^2, g^2 étant intégrables sur I, il en est de même de fg (voir proposition 10.3.9) et donc (par combinaison linéaire) de la fonction $(\lambda f + \mu g)^2$: ainsi $\lambda f + \mu g$ est de carré intégrable sur I. □

Remarque : on note souvent $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 10.3.11 (produit scalaire sur l'espace des fonctions continues et de carré intégrable)
Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, continues et de carré intégrable.
C'est un espace préhilbertien quand on le munit du produit scalaire : $(f \mid g) = \displaystyle\int_I fg$.

L'application $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_I fg$ est à l'évidence une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace des fonctions réelles qui sont de carré intégrable sur I.

Enfin, si $\displaystyle\int_I f^2 = 0$, alors f^2 (continue, positive) est identiquement nulle sur I (donc f est nulle sur I) en application de la proposition 10.3.6.

Conclusion : l'application $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_I fg$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions réelles de carré intégrable sur I. □

Exercice 10.27 (⇝ **corrigé**)
Soit f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'f$ possède une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$.
   Indication : utiliser une intégration par parties.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.
3. En déduire que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

10.4 Suites et séries de fonctions intégrables

10.4.1 Le théorème de convergence dominée

La démonstration du résultat ci-dessous est hors-programme dans la filière PSI.
Rappel : $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ est l'espace des fonctions $f\colon I\to\mathbb{K}$, continues par morceaux et intégrables sur I.

Proposition 10.4.1 (théorème de convergence dominée)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On fait les deux hypothèses suivantes :

a) la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers une fonction f elle-même continue par morceaux

b) ***hypothèse de domination*** *: il existe $\varphi\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in I,\ |f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$*

Alors les fonctions f_n et $f=\lim\limits_{+\infty} f_n$ sont intégrables sur I et : $\displaystyle\int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n$

Le programme insiste sur l'importance de « l'hypothèse de domination » ($|f_n|\leqslant\varphi$, avec φ intégrable).

Cas particulier : si I est un intervalle borné, l'hypothèse de domination est satisfaite s'il existe une constante M telle que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in I,\ |f_n(x)|\leqslant M$.

Exercice 10.28 (⇝ **corrigé**)

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Exercice 10.29 (⇝ **corrigé**)

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 10.30 (⇝ **corrigé**)

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^{n+2}}\,\mathrm{d}t=1$.

Exercice 10.31 (⇝ **corrigé**)

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigl(1+\frac{t^2}{n}\Bigr)^{-n}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$

Exercice 10.32 (⇝ **corrigé**)

Donner un équivalent quand $n\to+\infty$ de l'intégrale $\displaystyle J_n=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10.33 (⇝ **corrigé**)

Donner un équivalent quand $n\to+\infty$ de l'intégrale $\displaystyle K_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

10.4.2 Le théorème d'intégration terme à terme

La démonstration du résultat ci-dessous est hors-programme dans la filière PSI.

Proposition 10.4.2 (théorème d'intégration terme à terme)
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On fait les deux hypothèses suivantes :

a) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, et sa somme f est continue par morceaux

b) les f_n sont intégrables sur I et la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ est convergente.

Dans ces conditions : la fonction somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Le programme insiste sur l'importance de l'hypothèse de convergence de la série $\sum \int_I |f_n|$.

Exercice 10.34 (⇝ **corrigé**)
Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 10.35 (⇝ **corrigé**)
Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 10.36 (⇝ **corrigé**)
Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 10.37 (⇝ **corrigé**)
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Préciser la nature de la série $\sum u_n$.

10.5 Intégrales à paramètre

▷ Notations

Dans cette section on considère des fonctions $f\colon I \times J \to \mathbb{K}$ définies sur le produit cartésien de deux intervalles I et J, et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note x la variable qui parcourt I, et t celle qui parcourt J : ainsi $f(x,t)$ désigne l'image d'un élément quelconque de $I \times J$.

L'objectif est d'étudier sur I la fonction $g\colon x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$, dite « intégrale à paramètre ».

Ainsi J est l'intervalle d'intégration (par rapport à la variable t), et I est l'intervalle du paramètre x.

10.5.1 Le théorème de continuité des intégrales à paramètre

Les résultats de cette sous-section nécessitent des notions sur les fonctions de deux variables, notions qui sont présentées dans le chapitre « Calcul différentiel ».

Rappel : $\mathcal{L}^1(J,\mathbb{K})$ est l'espace des fonctions de J dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux et intégrables sur J.

Proposition 10.5.1 (théorème de continuité des intégrales à paramètre)
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit $f\colon (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On fait les trois hypothèses suivantes :
a) pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
*b) **hypothèse de domination** : il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall\, x \in I,\ \forall\, t \in J\ \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;*
c) pour tout t de J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
Dans ces conditions, la fonction $g\colon x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

On vérifiera toutes les conditions, mais l'hypothèse de domination est la plus importante.

Tout d'abord, les hypothèses (a) et (b) nous assurent que la fonction g est définie sur l'intervalle I.
Soit a un point quelconque de I. Il s'agit de prouver la continuité de g en a.
On va utiliser pour cela la caractérisation séquentielle de la continuité.
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de I, convergente vers a : tout revient à vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(a)$.
D'après l'hypothèse (c), on a : $\forall\, t \in J,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,t) = f(a,t)$.
La suite des fonctions $h_n\colon t \mapsto f(x_n,t)$ converge donc simplement, sur J, vers la fonction $h\colon t \mapsto f(a,t)$.
L'hypothèse (b) nous dit que la suite $(h_n)_{n\geqslant 0}$ est dominée sur J par une fonction intégrable φ.
D'après le théorème de convergence dominée (cf prop. 10.4.1), on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_J h_n = \int_J h$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_J f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(a,t)\,\mathrm{d}t$. La fonction g est donc continue en tout point a de I. □

▷ Adaptation à une hypothèse de domination sur tout segment de I

Le résultat (la continuité de g sur I) reste valable si on remplace l'hypothèse de domination par :

« pour tout segment K de I, il existe $\varphi_K \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R}^+)$, telle que : $\forall\, x \in K,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$ »

Bien sûr, dans ce nouvel énoncé, la fonction φ_K dépend du segment K de I sur lequel on se place.

La possibilité de ce nouvel énoncé provient du « caractère local » de la continuité.

▷ **Cas particulier où l'intervalle J est un segment $[a,b]$**

Le théorème de continuité admet une version simple quand l'intervalle J d'intégration est un segment :

Proposition 10.5.2 (intégrale à paramètre : continuité si on intègre sur un segment)
Soit $f\colon I\times[a,b]\to\mathbb{K}$, continue. Alors la fonction $x\mapsto\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Les hypothèses (a) et (c) du théorème de continuité des intégrales à paramètre sont clairement vérifiées.
Si K est un segment de I, la fonction continue $|f|$ est majorée sur le fermé borné $K\times[a,b]$.
On a donc une hypothèse de domination : $\forall\,(x,t)\in K\times[a,b],\ |f(x,t)|\leqslant M$.
La fonction constante M est bien sûr intégrable sur le segment $[a,b]$! On peut donc appliquer la version adaptée du théorème de continuité des intégrales à paramètre.
La continuité de la fonction $x\mapsto\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle I en résulte. □

Exercice 10.38 (continuité de la fonction Γ, ⇝ **corrigé**)
Montrer que la fonction $x\mapsto\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 10.39 (⇝ **corrigé**)
Montrer que la fonction $x\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.40 (⇝ **corrigé**)
On pose $g(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$. Montrer que g est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Calculer $g(0)$. Montrer que $g(x)=\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 10.41 (⇝ **corrigé**)
Peut-on appliquer le théorème de continuité des intégrales à la fonction $x\mapsto g(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{x\,\mathrm{d}t}{1+x^2t^2}$?

10.5.2 Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre

Dans le résultat qui suit, on considère une fonction $f\colon I\times J\to\mathbb{K}$.

Comme dans le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on pose $g(x)=\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

L'objectif est ici de préciser sous quelles hypothèses on peut écrire : $\forall\,x\in I,\ g'(x)=\int_J\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Rappel : $\mathcal{L}^1(J,\mathbb{K})$ est l'espace des fonctions continues par morceaux et intégrables sur J.

Proposition 10.5.3 (théorème de dérivation des intégrales à paramètre)
Soit $f\colon(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On fait les quatre hypothèses suivantes :
a) pour tout x de I, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ;

b) pour tout x de I, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;

*c) **hypothèse de domination** : il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall x \in I,\ \forall t \in J,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;*

d) pour tout t de J, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I ;

Alors la fonction $g\colon x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\forall x \in I,\ g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

On vérifiera toutes les hypothèses, mais l'hypothèse de domination (la troisième) est la plus importante.

L'hypothèse (a) dit que $g\colon x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur l'intervalle I.

Les hypothèses (b) et (c) impliquent que $x \mapsto \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur I.

Soit a quelconque dans I. Il s'agit de prouver que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

Pour établir l'existence et la valeur de cette limite, on va utiliser la caractérisation séquentielle.

Soit $(h_n)_{n\geqslant 0}$ une suite tendant vers 0. On doit donc montrer que : $\displaystyle\lim_{h_n\to 0} \frac{g(a+h_n)-g(a)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

Par ailleurs : $\displaystyle\frac{g(a+h_n)-g(a)}{h_n} = \int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t$, où on a posé $f_n(t) = \dfrac{f(a+h_n,t)-f(a,t)}{h_n}$.

- Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur J (conséquence de l'hypothèse (a)).
- Pour tout t de J, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ (existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et conséquence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$).
  Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ (qui est continue par morceaux, cf hypothèse (b)).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout t de J, on a :
  $$|f_n(t)| = \left|\frac{f(a+h_n,t)-f(a,t)}{h_n}\right| = \left|\frac{1}{h_n}\int_a^{a+h_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{x\in[a,a+h_n]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{(hypothèse (c))}$$

Le théorème de convergence dominée (cf prop. 10.4.1) s'applique donc à la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{g(a+h_n)-g(a)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

Avec la caractérisation séquentielle des limites, on a donc obtenu $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi g est dérivable en a, avec $g'(a) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$, et ceci pour tout point a de I.

Pour terminer, la continuité sur I de la fonction $g'\colon x \mapsto \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ résulte des hypothèses (c) et (d) et du théorème de continuité des intégrales à paramètre (cf prop 10.5.1). □

▷ Adaptation à une hypothèse de domination sur tout segment de I

Le résultat (le caractère $\mathcal{C}^1$ de g) est encore valable si on remplace l'hypothèse de domination par :

« Pour tout segment K de I, il existe $\varphi_K \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R}^+)$, telle que : $\forall x \in K,\ \forall t \in J,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_K(t)$ »

Bien sûr, dans ce nouvel énoncé, la fonction φ_K dépend du segment K de I sur lequel on se place.

Ce nouvel énoncé est rendu possible par le caractère local de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^1$ ».

▷ Cas particulier où l'intervalle J est un segment $[a, b]$

Le théorème de dérivation admet une version simple quand l'intervalle J d'intégration est un segment :

Proposition 10.5.4 (intégrale à paramètre : dérivabilité si on intègre sur un segment)
Soit $f\colon I \times [a, b] \to \mathbb{K}$. On fait les deux hypothèses suivantes :

a) pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$;

b) la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur $I \times [a, b]$.

Alors la fonction $g\colon x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\forall x \in I,\ g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$

Les hypothèses (a),(b),(d) du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont clairement vérifiées.

Si K est un segment de I, la fonction continue $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ est majorée sur le fermé borné $K \times [a, b]$.

On a donc une hypothèse de domination : $\forall (x, t) \in K \times [a, b],\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant M$.

La fonction constante M est bien sûr intégrable sur le segment $[a, b]$.

On peut donc appliquer la version adaptée du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

Il en résulte la dérivabilité de g sur I, et l'égalité : $\forall x \in I,\ g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$. □

Exercice 10.42 (caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction Γ, ⇝ **corrigé**)

Montrer que la fonction $x \mapsto \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 10.43 (⇝ **corrigé**)

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \arctan(x)$.

Exercice 10.44 (un calcul de l'intégrale de Gauss, ⇝ **corrigé**)

Étudier la dérivabilité de $x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Préciser $g(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Soit $h(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$. Prouver que $h(x) + g(x^2)$ est constante. En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Exercice 10.45 (⇝ **corrigé**)

Étudier la dérivabilité de $g\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. En déduire l'égalité $g(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

Exercice 10.46 (⇝ **corrigé**)

Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g(x) = \ln(x)$.

▷ Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

L'énoncé suivant utilise la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^p$ de deux variables. Cette question est traitée dans le chapitre « Calcul différentiel ».

Proposition 10.5.5
Soit $f\colon (x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On fait les trois hypothèses suivantes :
– *pour $x\in I$ et $1\leqslant k\leqslant p$, les fonctions $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont continues par morceaux sur J.*
– *pour tout k de $[\![0,p]\!]$, il existe $\varphi_k\in\mathcal{L}^1(J,\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall\, x\in I,\ \forall\, t\in J,\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\varphi_k(t)$*
Alors $g\colon x\mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^p$ sur I et : $\forall\, x\in I,\ g^{(p)}(x)=\displaystyle\int_J \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Nous ne détaillerons pas ici la démonstration, qui consiste en une application répétée (par récurrence sur l'entier p) de la proposition 10.5.3. □

Exercice 10.47 (caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction Γ, ⇝ **corrigé**)
Montrer que $\Gamma\colon x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que $\Gamma^{(p)}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln^p(t)\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10.48 (un calcul de l'intégrale de Lejeune-Dirichlet, ⇝ **corrigé**)
Montrer que $g\colon x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et calculer $g''(x)$.

Préciser les limites de g et de g' en $+\infty$, puis calculer $g(x)$ pour $x>0$.

Montrer que g est continue en 0. Calculer séparément $g(0)$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

10.5.3 Transformée de Fourier

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$.

À tout f de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on associe sa « transformée de Fourier » $\widehat{f}\colon\omega\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$.

Avec cette définition, la fonction $\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

On a les principales propriétés suivantes (avec des notations évidentes) :

– Linéarité : $\widehat{af+bg}=a\widehat{f}+b\widehat{g}$; contraction : $\widehat{f(at)}=\dfrac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\dfrac{\omega}{a}\Big)$; translation $\widehat{f(t+h)}=\widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{ih\omega}$.
– Dérivée de la transformée de Fourier :
  Si la fonction $t\mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et $\widehat{f}\,'(\omega)=-i\,\widehat{t\,f(t)}$.
  Plus généralement si les fonctions $t\mapsto t^nf(t)$ sont intégrables, alors $\widehat{f}^{\,(n)}(\omega)=(-i)^n\,\widehat{t^nf(t)}$.
– Transformée de Fourier de la dérivée :
  Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f'}(\omega)=i\,\omega\,\widehat{f}(\omega)$.
  Plus généralement si les $f^{(k)}$ sont intégrables, alors $\widehat{f^{(n)}}(\omega)=(i\,\omega)^n\,\widehat{f}(\omega)$.
– Transformée de Fourier inverse :
  Si $\widehat{f}$ est intégrable, on retrouve f à partir de $\widehat{f}$ par : $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$.

10.5.4 Transformée de Laplace

Soit E_a l'espace des fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telles que : $\forall\, p > a,\ t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On vérifie que si f est dans E_a, alors les fonctions $t \mapsto t^n f(t)$ sont aussi dans E_a.

La « transformée de Laplace » de $f \in E_a$ est la fonction définie pour $p > a$, par $\mathcal{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

Avec cette définition, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]a, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

On a les principales propriétés suivantes (pour f et g dans E_a) :

- Linéarité : $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$; contraction : $\mathcal{L}(f(at)) = \dfrac{1}{|a|}\mathcal{L}(f)\left(\dfrac{p}{a}\right)$.
- *Théorème du retard* : $\mathcal{F}(f(t-a)) = \mathrm{e}^{-ap}\mathcal{L}(f)(p)$.
- Dérivée de la transformée de Laplace :
  La fonction $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur $]a, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))' = \mathcal{L}(-tf(t))$;
  Plus généralement $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[$ et on a $(\mathcal{L}(f))^{(n)} = \mathcal{L}((-t)^n f(t))$.
- Transformée de Laplace des dérivées :
  Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et si f' est dans E_a, alors : $\forall\, p > a,\ \mathcal{L}(L)(f') = p\mathcal{L}(f) - f(0)$;
  Si f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$ et si $f', \ldots, f^{(n)}$ sont dans E_a : $\mathcal{L}(L)(f^{(n)}) = p^n\mathcal{L}(f) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$.
- Transformée de Laplace d'une primitive :
  Si f est dans E_a, alors $\displaystyle\int_0^t f$ est dans E_a et on a : $\mathcal{L}\left(\displaystyle\int_0^t f\right) = \dfrac{\mathcal{L}(f)}{p}$.
- Si la limite $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ existe et est finie, alors $\mathcal{L}(f)$ est intégrable et $\mathcal{L}\left(\dfrac{f(t)}{t}\right) = \displaystyle\int_p^{+\infty} \mathcal{L}(f)$.
- Quelques transformées classiques :

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p} \qquad \mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2} \qquad \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}} \qquad \mathcal{L}(\mathrm{e}^{\omega t}) = \frac{1}{p-\omega}$$

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2+1} \qquad \mathcal{L}(\cos(t)) = \frac{p}{p^2+1} \qquad \mathcal{L}(\mathrm{sh}(t)) = \frac{1}{p^2-1} \qquad \mathcal{L}(\mathrm{ch}(t)) = \frac{p}{p^2-1}$$

- *Théorème de la valeur initiale* : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} p\,\mathcal{L}(f) = f(0)$.
- *Théorème de la valeur finale* : $\displaystyle\lim_{p\to 0} p\,\mathcal{L}(f) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$ (si cette dernière limite existe).