Chapitre 12

Calcul différentiel

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

12.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

12.1.1 Fonctions réelles de plusieurs variables

Dans tout ce chapitre, l'espace $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure d'espace euclidien canonique.

La base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est donc orthonormée.

On considère des fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

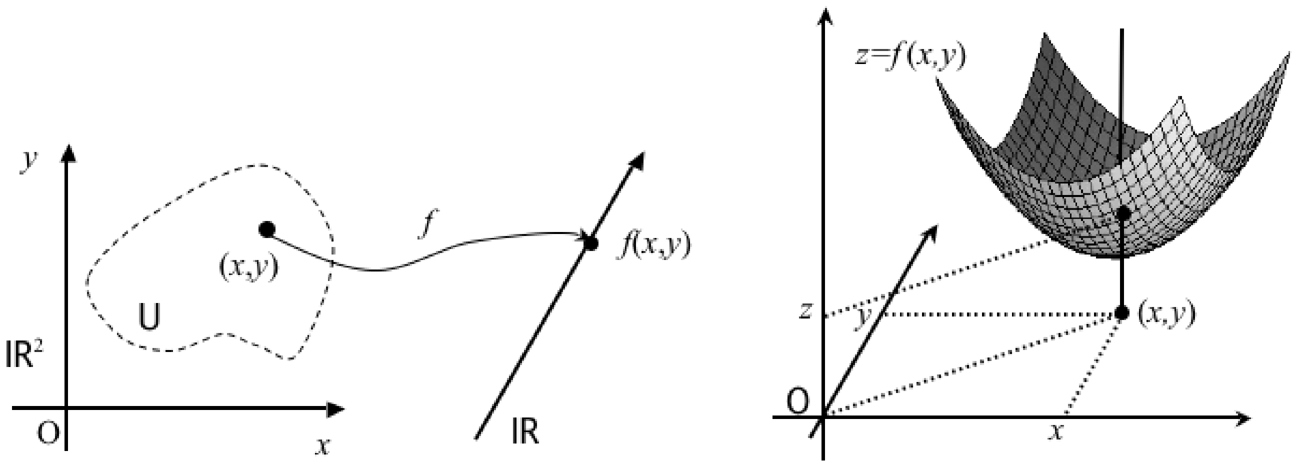
On cherche à généraliser la notion de dérivabilité, qui n'a plus de sens quand $p \geqslant 2$ (il est en effet impossible de considérer les taux d'accroissement de la définition 9.1.1).

En revanche, on verra qu'il est possible de généraliser la notion de développement limité d'ordre un, présentée dans la définition 9.1.2.

Dans ce chapitre, toutes les notions relatives à la continuité ont été étudiées dans le chapitre 5 (« espaces vectoriels normés de dimension finie »).

Voici comment il est possible de représenter graphiquement une fonction f de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et en particulier l'image d'un point (x, y) de U.

Dans la deuxième représentation (à droite), beaucoup plus visuelle, le point $(x, y, f(x, y))$ décrit une *surface* de l'espace, la projection de cette surface sur le plan Oxy étant l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur lequel est défini la fonction f.



Définition 12.1.1 (fonctions partielles en un point a pour $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, et U ouvert)
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
Soit $a = (a_1, \ldots, a_p)$ un élément de U, et soit i dans $[\![1, p]\!]$.
La fonction $h \mapsto \varphi_i(h) = f(a + he_i)$, à valeurs réelles, est définie sur un intervalle ouvert contenant 0.
On l'appelle la « i-ème fonction partielle » de f au point a.

On devrait peut-être noter $\varphi_{f,i,a}$ la i-ème fonction partielle de f au point a ? En tout cas cette fonction dépend de $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de l'indice i choisi dans $[\![1, n]\!]$ et du point a choisi dans U.

▷ Complément : fonction partielle « suivant un vecteur »

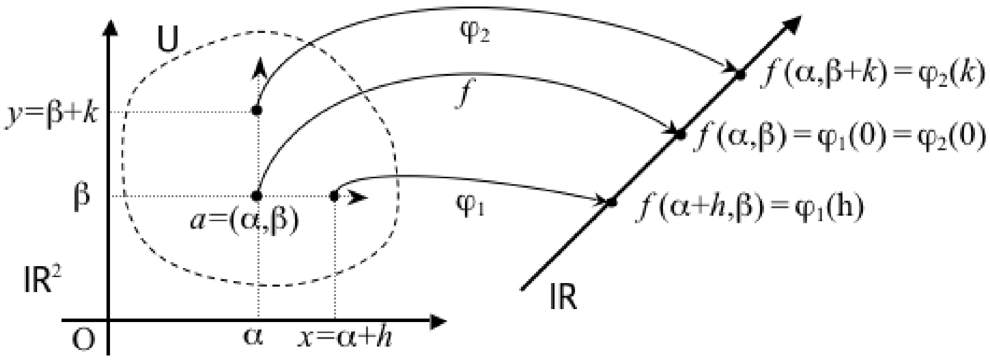
– Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
  Soit a un élément de U, et soit u un élément de $\mathbb{R}^p$.
  La fonction $h \mapsto \varphi_u(h) = f(a + hu)$, à valeurs réelles, est définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

On dit que φ_u est la fonction partielle de f, au point a, « suivant le vecteur u ».
Dans le cas particulier où $u = e_i$, on retrouve bien sûr la fonction partielle φ_i.

▷ L'insuffisance des fonctions partielles

Le schéma ci-dessous illustre les deux fonctions partielles φ_1 et φ_2 de f au point $a = (\alpha, \beta)$ de U.
- la fonction φ_1 est définie au voisinage de 0 par $\varphi_1(h) = f(\alpha + h, \beta)$;
  elle représente une restriction de f à l'axe d'origine a et parallèle à Ox ;
- la fonction φ_2 est définie au voisinage de 0 par $\varphi_2(k) = f(\alpha, \beta + k)$;
  elle représente une restriction de f à l'axe d'origine a et parallèle à Oy.

On s'en doute, la donnée de φ_1 et de φ_2 ne permet pas de « reconstituer » la fonction f au voisinage de a, notamment aux points (x, y) avec $x \neq \alpha$ et $y \neq \beta$.



▷ Fonctions partielles et continuité

Cette sous-section relève davantage des notions abordées dans le chapitre 5 (Evns de dimension finie).

Proposition 12.1.1 (la continuité de f implique celle de ses fonctions partielles)
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
On suppose que f est continue au point a de U.
Alors chacune des fonctions partielles $h \mapsto \varphi_i(h) = f(a + he_i)$ est continue en 0.
Plus généralement la fonction partielle $h \mapsto \varphi_u(h) = f(a + hu)$ suivant le vecteur u est continue en 0.

La réciproque de la propriété précédente est fausse, comme on va le voir sur deux exemples :

- Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ on pose $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. On pose $f(0, 0) = 0$.

  Les fonctions partielles de f en $(0, 0)$ sont nulles sur $\mathbb{R}$, donc continues en $(0, 0)$.

  Pourtant f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2} \neq f(0, 0)$.

- Étudions la continuité en $(0, 0)$ de f définie par $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

  Les fonctions partielles de f en $(0, 0)$ sont nulles sur $\mathbb{R}$, donc continues en $(0, 0)$.

  Plus généralement, soit $u = (\alpha, \beta) \neq \overrightarrow{0}$, et h dans $\mathbb{R}^*$. Posons $\varphi_u(h) = f(hu) = f(h\alpha, h\beta)$.

  On trouve $\varphi_u(h) = h\dfrac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + h^2\beta^4}$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \varphi_u(h) = 0 = \varphi_u(0)$ (distinguer $\alpha \neq 0$ et $\alpha = 0$).

Les fonctions partielles de f en $(0,0)$ (selon un vecteur quelconque) sont donc toutes continues en 0.

Pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$! En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$.

Ici, on a prouvé cette discontinuité en s'approchant de l'origine de façon « non rectiligne ».

Les deux exemples précédents illustrent bien le fait que la connaissance (et même les propriétés) des fonctions partielles de f en un point a ne suffisent à connaître le « comportement » de f en ce point (en tout cas pour ce qui est de la continuité).

12.1.2 Dérivées partielles d'ordre un

Définition 12.1.2 (dérivées partielles d'ordre 1, pour $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, et U ouvert)

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.

Soit φ_i la i-ème fonction partielle de f en un point a de U.

On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1, au point a, par rapport à sa i-ème variable, si la fonction φ_i est elle-même dérivable en 0.

Cette dérivée partielle, égale à $\varphi_i'(0)$, est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, ou encore $\partial_i f(a)$.

Dans la pratique, le programme suggère de se limiter à $p \leqslant 3$.

- Dans le cas $p = 3$, on notera plus souvent x, y, z que x_1, x_2, x_3.
- Dans le cas $p = 2$, on notera plus souvent x, y que x_1, x_2.
- Dans le cas $p = 1$, c'est-à-dire pour une fonction d'une seule variable réelle, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, il n'y a pas de « dérivée partielle » mais seulement la dérivée au sens usuel.

Dans le cas $p = 3$, en notant (x, y, z) les variables « génériques », $a = (x_0, y_0, z_0)$ et $f_0 = f(0,0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f_0}{h} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h, z_0) - f_0}{h} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0+h) - f_0}{h}$$

Si la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe en tout a de U, on peut définir la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$.

▷ Un premier calcul de dérivées partielles

Sauf cas particulier, le calcul des fonctions dérivées partielles premières de f ne pose pas plus de difficultés que celui de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle. Il suffit en effet de dériver par rapport à l'une des variables, les autres étant momentanément considérées comme constantes.

Considérons par exemple la fonction $f : (x, y) \mapsto \arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Cette fonction est définie pour $x \neq 0$ et $|y| \leqslant |x|$.

Plaçons-nous par exemple sur l'ouvert U défini par $x > 0$ et $-x < y < x$.

Pour tout point $a = (x, y)$ de U, on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}} = -\frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

On constate que pour tout a de U, on a : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

On peut donc dire que f satisfait, sur U, à l'*équation aux dérivées partielles* : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

▷ Une difficulté de notation

Les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ comportent un risque dû à l'ambiguïté du rôle de x et y.

Le nom x, par exemple, désigne à la fois la première variable de la fonction f, et l'abscisse du point où calcule les dérivées partielles.
Dans ces conditions, que penser des expressions $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, y)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x)$?

Considérons par exemple la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 \sin(y)$.

Les fonctions dérivées partielles premières de f sont $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto 3x^2 \sin(y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto x^3 \cos(y)$.

Ainsi, pour tout (x, y) de U, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, y) = 3x^4 \sin(y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x) = 3y^2 \sin(x)$.

En revanche, définissons les fonctions $\begin{cases} g\colon (x, y) \mapsto g(x, y) = f(x^2, y) = x^6 \sin(y) \\ h\colon (x, y) \mapsto h(x, y) = f(y, x) = y^3 \sin(x) \end{cases}$

On voit que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 6x^5 \sin y$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = y^3 \cos(x)$.

On a ici obtenu des résultats différents dans les deux cas suivants :

– premier calcul : on a formé la *fonction* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ puis on a évalué cette fonction au point (x^2, y).

– second calcul : on a « dérivé » *l'expression* $g(x, y) = f(x^2, y)$ par rapport à x, au point (x, y).

En quelque sorte, on a calculé $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, y)$ dans le premier cas, et $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(f(x^2, y)\Big)$ dans le second !

Le risque d'erreur vient de ce que x et y sont à la fois les noms de variables de f et qu'ils peuvent apparaître dans les coordonnées des points où sont calculées les dérivées partielles (tant qu'on calcule les dérivées partielles en (x, y) a priori tout va bien). Le risque d'erreur vient aussi de ce qu'on commet parfois l'abus de notation qui consiste à confondre une *fonction* avec l'*expression* qui représente la valeur de cette fonction en un point.

Les notations $\partial_1(f)(a)$ et $\partial_2(f)(a)$ limitent ces risques, mais elles ne sont pas très utilisées.

En fait, rien n'oblige à nommer x, y les variables de f.

On définit en effet la même fonction f en écrivant $f : (x, y) \mapsto x^3 \sin(y)$ ou $f : (u, v) \mapsto u^3 \sin(v)$.

En général on se tient quand même à un choix précisé au départ, ne serait-ce que pour faciliter les calculs de changements de variables (comme le passage en coordonnées polaires).

Par exemple, si f est une fonction du couple (x, y), on définit une fonction F du couple (ρ, θ) en utilisant le changement de variables $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$ et en posant $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$.

L'égalité $f(x, y) = F(\rho, \theta)$ permet alors d'exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$.

Conscient des risques, on pourra noter $Z = f(x, y) = F(\rho, \theta)$ puis écrire ensuite $\dfrac{\partial Z}{\partial x}, \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \dfrac{\partial Z}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial Z}{\partial \theta}$.

▷ Les dérivées partielles seules n'impliquent pas la continuité !

L'existence de dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point !
Pour s'en convaincre, on reprend f définie par : $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq \overrightarrow{0}$, et $f(0, 0) = 0$.

On a vu que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Pourtant, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et elles sont nulles.

En effet f étant nulle « sur Ox et Oy », ses deux fonctions partielles en $(0,0)$ sont identiquement nulles.

▷ **Complément : dérivée suivant un vecteur**

– Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.

  Soit a un élément de U, et soit u un élément de $\mathbb{R}^p$.

  La fonction $h \mapsto \varphi_u(h) = f(a+hu)$, à valeurs réelles, est définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

– On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1, au point a, « selon le vecteur u », si la fonction φ_u est elle-même dérivable en 0.

  Dans le cas particulier où $u = e_i$, on retrouve bien sûr la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

– On reprend f définie par : $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq \overrightarrow{0}$, et $f(0,0) = 0$.

  On a vu que f n'est pas continue en $(0,0)$.

  Soit $u = (\alpha,\beta) \neq \overrightarrow{0}$, soit h dans $\mathbb{R}^*$.

  On pose $\varphi_u(h) = f(hu) = f(h\alpha, h\beta) = h\dfrac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+h^2\beta^4}$.

  On voit que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi_u(h)}{h} = \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$, et que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi_u(h)}{h} = 0$ si $\alpha = 0$.

  Ainsi la fonction f possède une dérivée en $(0,0)$ suivant tout vecteur, alors même qu'elle n'est pas continue à l'origine. Cet exemple ne rentre peut-être pas dans les limites du programme mais il illustre qu'avec la simple existence des dérivées partielles on ne va pas bien loin.

  L'étape suivante résout ce problème, en introduisant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

12.1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 12.1.3 (fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$)
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont définies et continues sur U.

Proposition 12.1.2 (opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)
Soit f et g définies sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$.

– *les fonctions $\lambda f + \mu g$ (avec λ, μ dans $\mathbb{R}$) et fg sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*

– *si g ne s'annule pas sur U alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*

▷ **Dérivées partielles et opérations sur fonctions $\mathcal{C}^1$**

Il est plus simple d'utiliser ici la notation $\partial_i(f)$ pour désigner la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Le mode de calcul des dérivées partielles est assez évident :

$$\partial_i(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\partial_i(f) + \mu\,\partial_i(g) \qquad \partial_i(fg) = \partial_i(f)\,g + f\,\partial_i(g) \qquad \partial_i(f^n) = n\,\partial_i(f)\,f^{n-1}$$

$$\partial_i\Big(\frac{1}{g}\Big) = -\frac{\partial_i(g)}{g^2} \qquad \partial_i\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{\partial_i(f)\,g - f\,\partial_i(g)}{g^2}$$

▷ **Exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$**

– la i-ème fonction coordonnées π_i, définie sur $\mathbb{R}^p$ par $\pi_i(x_1,\ldots,x_p) = x_i$, est de classe $\mathcal{C}^1$.
– par combinaison linéaire de produits, toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
– par quotient, toute fonction rationnelle sur $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine.

Proposition 12.1.3 (composition par une fonction d'une variable réelle)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Soit $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et telle que $f(U) \subset I$.
Alors la fonction $g = \varphi \circ f$, définie sur U et à valeurs réelles, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Soit a dans U, soit i dans $[\![1,p]\!]$, et soit f_i (resp. g_i) la i-ème fonction partielle de f (resp. g) en a.
On sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que : $|h| < \delta \Rightarrow a + he_i \in U$.
Pour $|h| < \delta$, on a : $g_i(h) = g(a+he_i) = \varphi(f(a+he_i)) = \varphi(f_i(h))$. Autrement dit : $g_i = \varphi \circ f_i$.
Il en résulte $g_i'(0) = f_i'(0)\varphi'(f_i(0))$, ce qui prouve l'existence de $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$ et l'égalité $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\varphi'(f(a))$.
On fait on a l'égalité de fonctions $\dfrac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,\varphi'\circ f$ sur U, qui s'écrit aussi : $\partial_i(\varphi\circ f) = \partial_i(f)\,\varphi'\circ f$.
Cette égalité prouve que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Exemples

– si $f(x,y) = \varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}\,\varphi'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x}\,\varphi'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.
– la fonction $r : (x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
 pour tout $(x,y,z) \neq \overrightarrow{0}$, on a (en simplifiant les notations) : $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$.
– la fonction $f\colon (x,y) \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{2+\sin(xy)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (par opérations sur fonctions $\mathcal{C}^1$).

12.1.4 Développement limité, différentielle

Définition 12.1.4 (développement limité en un point a de U)
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
Soit a un élément de U. On sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que : $\|h\| < \delta \Rightarrow a + h \in U$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre 1 en a s'il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que :
pour tout h de $\mathbb{R}^p$ tel $\|h\| < \delta$, on a : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i + \mathrm{o}(\|h\|)$

« $\mathrm{o}(\|h\|)$ » désigne une fonction $\varepsilon\colon U \to \mathbb{R}$ « négligeable devant $\|h\|$ » c'est-à-dire telle que $\displaystyle\lim_{h\to\overrightarrow{0}} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0$.
Ici la norme utilisée sur $\mathbb{R}^p$ est sans importance.

▷ Un exemple de développement limité

Considérons $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie $f(x,y) = x^2\exp(x+2y-1)$, et plaçons-nous au point $a = (1,0)$.
On pose $h = (h_1, h_2)$, et on effectue le développement de $f(a+h)$:
$f(a+h) = f(1+h_1,h_2) = (1+h_1)^2\exp(h_1+2h_2) = \Big(1+2h_1+\mathrm{o}(h_1)\Big)\Big(1+h_1+2h_2+\mathrm{o}(\|(h_1,h_2)\|)\Big)$.
Or $\begin{cases} |h_1| \leqslant \|(h_1,h_2)\| \\ |h_2| \leqslant \|(h_1,h_2)\| \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mathrm{o}(h_1) = \mathrm{o}(\|(h_1,h_2)\|) \\ \mathrm{o}(h_2) = \mathrm{o}(\|(h_1,h_2)\|) \end{cases}$. De même : $h_1h_2 \leqslant \dfrac{1}{2}(h_1^2+h_2^2) = \mathrm{o}(\|(h_1,h_2)\|)$.
On a donc obtenu le développement limité : $f(a+h) = 1+3h_1+2h_2+\mathrm{o}(\|h\|)$.

Proposition 12.1.4 (le développement limité implique les dérivées partielles)
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
Soit a un élément de U.
On suppose que f possède en a un développement limité d'ordre 1 : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i + \mathrm{o}(\|h\|)$
Alors f est continue en a.
De plus elle possède des dérivées partielles en a, données par : $\partial_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda_i$.

Un DL d'ordre 1 en a s'écrit donc nécessairement : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i + \mathrm{o}(\|h\|)$.

▷ Retour sur l'exemple précédent

On reprend l'exemple de $f(x,y) = x^2\exp(x+2y-1)$ sur $\mathbb{R}^2$.
On a obtenu le développement limité au point $a=(1,0)$: $f(a+h) = 1+3h_1+2h_2+\mathrm{o}(\|h\|)$.
On note par ailleurs que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+x^2)\exp(x+2y-1)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2\exp(x+2y-1)$.
Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3$ (on retrouve le coefficient de h_1) et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2$ (on retrouve le coefficient de h_2).

Compléments : contre-exemples

- La continuité de f en a n'implique pas l'existence d'un développement limité.
  Par exemple, la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est continue en $(0,0)$.
  Mais elle ne possède pas de DL en $(0,0)$ tout simplement car elle n'y a pas de dérivées partielles.
  En effet $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x>0 \\ -1 \text{ si } x<0 \end{cases}$ et de même $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \begin{cases} 1 \text{ si } y>0 \\ -1 \text{ si } y<0 \end{cases}$
- La simple existence de dérivées partielles n'implique pas celle d'un développement limité.
  On a déjà rencontré $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et par $f(0,0) = 0$.
  On sait que les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent, et qu'elles sont égales à 0.
  Mais f ne possède pas de développement limité en $(0,0)$, car elle n'y est pas continue !
- Posons enfin $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.
  La fonction f est continue en $(0,0)$ (utiliser $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{|x|}{2}$), et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Si f avait un développement limité en $(0,0)$, celui-ci s'écrirait donc $f(h,k) = \mathrm{o}(\|(h,k)\|)$.

En utilisant la norme euclidienne, cela signifierait que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$.

Or dans le cas particulier $h = k > 0$, ce quotient est constant non nul.

Avec ce dernier exemple, on a donc une fonction continue en $(0,0)$, ayant en ce point des dérivées partielles premières, mais n'y possédant pas de développement limité.

Pour « assurer » l'existence d'un développement limité, il faut en demander un peu plus aux dérivées partielles, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 12.1.5 (le caractère $\mathcal{C}^1$ implique l'existence d'un DL en tout point)
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Alors f possède un développement limité d'ordre 1 en tout point a de U.
Ce développement s'écrit : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i + \mathrm{o}(\|h\|)$

Ce développement peut aussi s'écrire : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)\, h_i + \mathrm{o}(\|h\|)$

On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme $x \mapsto \|x\|_1$. On note $e_1, e_2, \ldots, e_p$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On se donne un point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ de U.

On sait que le DL de f en a, s'il existe, s'écrit nécessairement : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)\, h_i + \mathrm{o}(\|h\|)$.

Il nous faut donc montrer que $\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)\, h_i$ est un $\mathrm{o}(\|h\|)$ quand $h \to \overrightarrow{0}$.

On se donne $\varepsilon > 0$. Les fonctions $\partial_i f$ étant continues en a, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, b \in \mathbb{R}^p,\ \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \|b-a\| < \delta \Rightarrow |\partial_i f(b) - \partial_i f(a)| < \varepsilon$$

Dans toute la suite, on se donne $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$, avec $\|h\| < \delta$.

Pour $0 \leqslant i \leqslant p$, posons $\begin{cases} u_i = (h_1, \ldots, h_i, 0, \ldots, 0) \text{ (ainsi } u_p = h \text{, et on convient que } u_0 = \overrightarrow{0}) \\ b_i = a + u_i = (a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_i+h_i, a_{i+1}, \ldots, a_p) \end{cases}$

Avec ces définitions, la ligne polygonale $b_0 b_1 \ldots b_{i-1} b_i \ldots b_p$, d'origine $b_0 = a$ et d'extrémité $b_p = a+h$, est toute entière incluse dans la boule ouverte $B(a,\delta)$.

On note que $f(a+h) - f(a) = f(b_p) - f(b_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \big(f(b_i) - f(b_{i-1})\big)$.

Posons $\psi_i(t) = f(b_{i-1} + t e_i)$ (c'est la i-ème fonction partielle de f au point b_{i-1}).

Avec cette notation, on peut écrire : $f(b_i) - f(b_{i-1}) = \psi_i(h_i) - \psi_1(0)$.

La fonction ψ_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, h_i]$ (au moins) et on a $\psi_i'(t) = \partial_i(f)(b_{i-1} + t e_i)$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $h_i' \in]0, h_i[$ tel que $\psi_i(h_i) - \psi_i(0) = h_i\, \psi_i'(h_i')$.

Il existe donc c_i dans « l'intervalle ouvert » $]b_{i-1}, b_i[$, donc dans $B(a,\delta)$, tel que $f(b_i) - f(b_{i-1}) = h_i\, \partial_i(f)(c_i)$.

Avec ces notations :

$$\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)\, h_i = \sum_{i=1}^{p} \big(f(b_i) - f(b_{i-1}) - \partial_i f(a)\, h_i\big) = \sum_{i=1}^{p} h_i \big(\partial_i(f)(c_i) - \partial_i(f)(a)\big)$$

Les c_i étant dans $B(a,\delta)$, il en résulte : $|\varphi(h)| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |h_i|\,|\partial_i(f)(c_i) - \partial_i(f)(a)| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{p} \|h\|_1$.

Il en résulte que $\varphi(h)$ est un $\mathrm{o}(h)$ quand $h \to \overrightarrow{0}$, ce qu'il fallait démontrer. □

▷ **Une remarque toute bête, quoique**

Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors elle est continue sur U !

C'est évident pour les fonctions d'une variable réelle car alors $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ dérivabilité $\Rightarrow$ continuité.

Pour ce qui est des fonctions de plusieurs variables, il faut se souvenir que le caractère $\mathcal{C}^1$ de f signifie l'existence et la continuité des dérivées partielles de f, et on sait la difficulté qu'il y a à « récupérer » des propriétés de f à partir de propriétés de ses fonctions dérivées partielles.

Rappelons par exemple que $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (avec $f(0,0)=0$) possède des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais qu'elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ (car elle ne l'est pas en $(0,0)$).

Définition 12.1.5 (différentielle en un point a de U d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U)

Soit $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Soit a un point de U.

On appelle *différentielle de f en a*, et on note $\mathrm{d}f(a)$ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^p$ par :

$\forall\, h = (h_1, h_2, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p,\ \mathrm{d}f(a)\cdot h = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, ou encore $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i\, \partial_i f(a)$.

La différentielle de f en a est une forme linéaire qui donne une estimation de la différence $f(a+h) - f(a)$, avec une erreur négligeable devant $\|h\|$. Matriciellement, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} + \mathrm{o}(\|h\|)$$

▷ **Nouvelle notation du DL d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$**

Si $f\colon U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, son DL en a s'écrit : $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + \mathrm{o}(\|h\|)$.

12.1.5 Règle de la chaîne pour les dérivées partielles

Proposition 12.1.6 (règle de la chaîne, appliquée à la dérivation de $f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$)

Soit $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.

Soit $t \mapsto M(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t))$ un arc paramétré, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et à valeurs dans U.

La fonction $t \mapsto \varphi(t) = f(M(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t))$ est donc définie sur I, à valeurs réelles.

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Plus précisément : $\forall\, t \in I,\ \varphi'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i'(t)\, \partial_i f(M(t))$.

On peut bien sûr écrire le même résultat sous la forme : $\forall\, t \in I,\ \varphi'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(M(t))$

On va prouver la dérivabilité de φ en un point t_0 fixé de I.

Pour simplifier, on pose $M_0 = M(t_0) \in U \subset \mathbb{R}^p$, $M_h = M(t_0+h) \in U \subset \mathbb{R}^p$, et $M_0' = M'(t_0) \in \mathbb{R}^p$.

La dérivabilité de $t \mapsto M(t)$ en t_0 s'écrit : $M_h = M_0 + hM_0' + h\,\varepsilon_1(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^p$.

L'application f, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, possède un développement limité d'ordre 1 en M_0.

Ce développement est : $f(M_0+\delta) = f(M_0) + \mathrm{d}f(M_0)\cdot\delta + \|\delta\|\,\varepsilon_2(\delta)$, avec $\lim\limits_{\delta\to\vec{0}} \varepsilon_2(\delta) = 0$.

On l'écrit en $M_h = M_0 + hM_0' + h\,\varepsilon_1(h)$, donc avec $\delta = \overrightarrow{M_0M_h} = h(M_0' + \varepsilon_1(h))$:

– le terme $\|\delta\|\,\varepsilon_2(\delta)$ devient $|h|\ \|M_0' + \varepsilon_1(h)\|\,\varepsilon_2(h(M_0'+\varepsilon_1(h)))$ et est un $\mathrm{o}(h)$ quand $h\to 0$.

– de même : $\mathrm{d}f(M_0)\cdot\delta = h\,\mathrm{d}f(M_0)\cdot(M_0'+\varepsilon_1(h)) = h\,\mathrm{d}f(M_0)\cdot M_0' + h\,\mathrm{d}f(M_0)\cdot\varepsilon_1(h) = h\,\mathrm{d}f(M_0)\cdot M_0' + \mathrm{o}(h)$.

Ainsi : $f(M_h) = f(M_0) + h\,\mathrm{d}f(M_0)\cdot M_0' + \mathrm{o}(h)$, ou encore $\varphi(t_0+h) = \varphi(t_0) + h\,\mathrm{d}f(M(t_0))\cdot M'(t_0) + \mathrm{o}(h)$.

Cette égalité exprime que φ est dérivable en t_0 et que $\varphi'(t_0) = \mathrm{d}f(M(t_0))\cdot M'(t_0)$.

Le résultat est vrai pour tout t_0. Ainsi : $\forall t\in I,\ \varphi'(t) = \mathrm{d}f(M(t))\cdot M'(t)$.

En d'autres termes : $\forall t\in I,\ \varphi'(t) = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i'(t)\partial_i(f)(M(t))$.

Compte tenu des hypothèses sur l'arc $t\mapsto M(t)$ (il est de classe $\mathcal{C}^1$) et sur f (les fonctions $\partial_i(f)$ sont continues), il en résulte que φ' est continue (c'est-à-dire φ est de classe $\mathcal{C}^1$) sur I. □

▷ Un exemple simple

Prenons l'exemple de l'arc paramétré $t\mapsto M(t) = (\cos(t),\sin(t))$, dont le support est le cercle unité.

Soit $f\colon U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant lui-même le cercle unité.

Alors $\varphi\colon t\mapsto f(M(t)) = f(\cos(t),\sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée au point t s'écrit : $\varphi'(t) = -\sin(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + \cos(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))$.

On pourra simplifier : $\varphi'(t) = -\sin(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(M) + \cos(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(M)$ en se souvenant que $M = (\cos(t),\sin(t))$.

▷ Application aux dérivées partielles de $g(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$

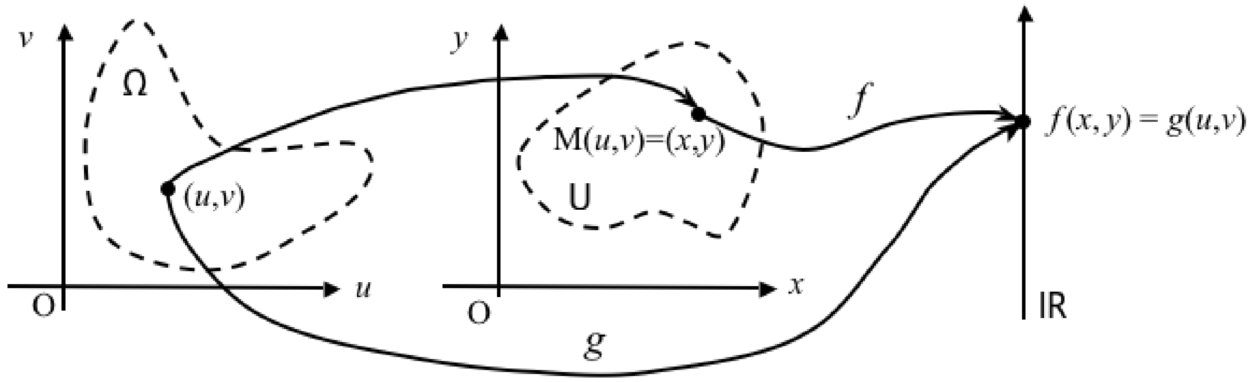
On se place maintenant dans la situation suivante :

– la fonction $f\colon U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.

– les fonctions $\begin{cases}(u,v)\mapsto x(u,v)\\(u,v)\mapsto y(u,v)\end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

– on suppose que, pour tout (u,v) de Ω, le point $M(u,v) = (x(u,v),y(u,v))$ est élément de U.

Tout cela est résumé dans le schéma suivant :



Proposition 12.1.7 (dérivées partielles de $(u,v)\mapsto f(x(u,v),y(u,v))$)
Soit $f\colon U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.

Soit $\begin{cases}(u,v)\mapsto x(u,v)\\(u,v)\mapsto y(u,v)\end{cases}$ *deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.*

On suppose que, pour tout (u,v) de Ω, le point $M(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ est élément de U.
Alors la fonction $g\colon (u,v)\mapsto f(M(u,v))$, définie sur Ω, à valeurs réelles, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Plus précisément : $\forall\,(u,v)\in\Omega,\ \begin{cases}\partial_1 g(u,v)=\partial_1 x(u,v)\,\partial_1 f(M)+\partial_1 y(u,v)\,\partial_2 f(M)\\\partial_2 g(u,v)=\partial_2 x(u,v)\,\partial_1 f(M)+\partial_2 y(u,v)\,\partial_2 f(M)\end{cases}$

On se place en un point $m=(u,v)$ fixé de Ω. On note $M=(x(m),y(m))$ (qui est dans U).

On considère l'arc paramétré $t\mapsto(X(t),Y(t))$, avec $\begin{cases}X(t)=x(u{+}t,v)\\Y(t)=y(u{+}t,v)\end{cases}$ (avec notamment $M=(X(0),Y(0))$.

Par une application très simple de la règle de la chaîne (cf proposition 12.1.6), cet arc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I contenant 0, et il est à valeurs dans U.

On trouve en particulier : $X'(0)=\partial_1 x(m)$ et $Y'(0)=\partial_1 y(m)$.

La règle de la chaîne, toujours elle, nous dit que la fonction $\varphi\colon t\mapsto f(X(t),Y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Plus précisément : $$\begin{aligned}\varphi'(0)&=\mathrm{d}f(M)\cdot(X'(0),Y'(0))=\begin{pmatrix}\partial_1 f(M)&\partial_2 f(M)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'(0)\\Y'(0)\end{pmatrix}\\&=\partial_1 x(m)\,\partial_1 f(M)+\partial_1 y(m)\,\partial_2 f(M)\end{aligned}$$

On revient aux notations de la proposition 12.1.7.
La fonction $t\mapsto\varphi(t)=f(X(t),Y(t))=f(x(u+t,v),y(u+t,v))=g(u+t,v)$ n'est autre que la première fonction partielle de g au point $m=(u,v)$.

La dérivabilité de φ en 0 signifie donc l'existence de $\partial_1(g)(m)$ (et l'égalité $\partial_1(g)(m)=\varphi'(0)$).

On a donc obtenu : $\partial_1 g(m)=\partial_1 x(m)\,\partial_1 f(M)+\partial_1 y(m)\,\partial_2 f(M)$.

Ce résultat vaut pour tout $m=(u,v)$ de Ω, et pour le point $M=(x(m),y(m))$ de U qui s'en déduit.

En considérant cette fois l'arc $t\mapsto(X(t),Y(t))$, avec $\begin{cases}X(t)=x(u,v{+}t)\\Y(t)=y(u,v{+}t)\end{cases}$, et donc la deuxième application partielle de g au point $m=(u,v)$, on aboutirait à : $\partial_2 g(m)=\partial_2 x(m)\,\partial_1 f(M)+\partial_2 y(m)\,\partial_2 f(M)$.

Finalement : $\forall\,m\in\Omega$, avec $M=(x(m),y(m))\in U$, on a : $\begin{cases}\partial_1 g(m)=\partial_1 x(m)\,\partial_1 f(M)+\partial_1 y(m)\,\partial_2 f(M)\\\partial_2 g(m)=\partial_2 x(m)\,\partial_1 f(M)+\partial_2 y(m)\,\partial_2 f(M)\end{cases}$

Par hypothèse sur les fonctions $(u,v)\mapsto x(u,v)$, $(u,v)\mapsto y(u,v)$ et $(x,y)\mapsto f(x,y)$ (elles sont $\mathcal{C}^1$: leurs fonctions dérivées partielles sont donc continues), on en déduit que les fonctions $\partial_1(g)$ et $\partial_2(g)$ sont continues.

En conclusion, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. □

▷ Complément : écritures équivalentes du résultat précédent

On rappelle que la chaîne $(u,v)\xrightarrow{x,y}(x,y)\xrightarrow{f}f(x,y)$ se réduit à $(u,v)\xrightarrow{g}g(u,v)$.
On simplifie les notations en considérant que les dérivées partielles des fonctions x, y et g sont calculées en un point (u,v) quelconque de Ω et que celles de f sont calculées au point correspondant (x,y) de U.
En se souvenant que $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} J_{u,v} \quad \text{où} \quad J_{u,v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Les lignes $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ représentent la différentielle de g en (u, v) et celle de f en (x, y).

Notons $\Phi(u, v)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $J_{u,v}$ dans la base canonique.

Avec ces notations, on peut donc écrire : $\mathrm{d}g(u, v) = \mathrm{d}f(x, y) \circ \Phi(u, v)$.

Mieux encore, on peut écrire $\mathrm{d}g = \mathrm{d}f \circ \Phi$, ce qui généralise (de très belle mais très hors-programme façon) la formule $(f \circ x)' = f'(x)x'$ pour des fonctions $u \mapsto x(u)$ et $x \mapsto f(x)$ d'une variable réelle.

▷ **Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe**

On rappelle qu'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ est dit *convexe* si : $\forall a \in U,\ \forall b \in U,\ \forall t \in [0, 1],\ (1 - t)a + tb \in U$.

Proposition 12.1.8 (caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe)
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et soit f une fonction définie sur U, à valeurs réelles.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
a) la fonction f est constante sur U
b) la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et ses fonctions dérivées partielles sont identiquement nulles.

Le sens $a) \Rightarrow b)$ est évident.
On suppose donc que f est $\mathcal{C}^1$ sur U et que les fonctions $\partial_i(f)$ sont identiquement nulles sur U.

Soit a, b deux points de U. On forme l'arc $t \in [0, 1] \mapsto a + t(b - a)$, dont le support est le segment $[a, b]$, qui est lui-même inclus dans l'ouvert U (hypothèse de convexité).

Pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, on pose $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$.
Par la règle de la chaîne, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et : $\forall t \in [0, 1],\ \varphi'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(b_i - a_i)\,\partial_i f(M(t))$.
En appliquant l'hypothèse sur les $\partial_i(f)$, on trouve $\varphi'(t) = 0$ pour tout t.

Ainsi φ est constante sur $[0, 1]$, et en particulier $\varphi(1) = \varphi(0)$, c'est-à-dire $f(b) = f(a)$.

Comme c'est vrai pour tous a, b de U, la fonction f est constante sur U. □

Une autre façon d'exprimer la deuxième alternative est :
– la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et sa différentielle est nulle en tout point de U.
– la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et son gradient est nul en tout point de U.

12.1.6 Passage en coordonnées polaires

On reprend ce qui précède, en remplaçant les coordonnées (u, v) par les coordonnées polaires (ρ, θ).
Dans la pratique on fait varier (ρ, θ) dans un ouvert Ω inclus dans $\mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$.

Les fonctions $\begin{cases} (\rho, \theta) \mapsto x = \rho\cos(\theta) \\ (\rho, \theta) \mapsto y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et à valeurs réelles.

On se donne la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

On suppose que si (ρ,θ) est dans Ω, alors $(x=\rho\cos(\theta), y=\rho\sin(\theta))$ est dans U.

On définit donc $g\colon \Omega\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, par : $g(\rho,\theta)=f(x,y)$, en sous-entendant $\begin{cases} x=\rho\cos(\theta)\\ y=\rho\sin(\theta)\end{cases}$

On obtient le système (S) : $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \rho}=\dfrac{\partial x}{\partial \rho}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \rho}\,\dfrac{\partial f}{\partial y}=\cos(\theta)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sin(\theta)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}=\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\,\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\rho\sin(\theta)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}+\rho(\cos\theta)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\end{cases}$

Il suffit d'inverser (S) pour obtenir les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Notons L_1 et L_2 les deux lignes de (S) :

En formant $\begin{cases}\rho\cos(\theta)L_1-\sin(\theta)L_2\\ \rho\sin(\theta)L_1+\cos\theta L_2\end{cases}$ on trouve $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos(\theta)\,\dfrac{\partial g}{\partial \rho}-\dfrac{\sin(\theta)}{\rho}\,\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\sin(\theta)\,\dfrac{\partial g}{\partial \rho}+\dfrac{\cos(\theta)}{\rho}\,\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\end{cases}$

Remarques diverses sur le « passage en polaires »

- On trouve en particulier : $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=\cos(\theta)$, $\quad\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin(\theta)}{\rho}$, $\quad\dfrac{\partial \rho}{\partial y}=\sin(\theta)\quad$ et $\quad\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{\cos(\theta)}{\rho}$.

  On peut retrouver $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}$ avec $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, mais c'est moins facile avec θ.

- **Attention !** On note par exemple que $\dfrac{\partial y}{\partial \theta}=\rho\cos(\theta)$, alors que $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{\cos(\theta)}{\rho}$.

  On ne doit **jamais** considérer les dérivées partielles comme des « quotients ».

  Échanger deux variables ne conduit en général pas à des dérivées partielles inverses l'une de l'autre !

- On peut vouloir uniquement calculer les dérivées partielles de ρ et θ par rapport à x,y.

  On « différencie » le changement de variables : $\begin{cases}x=\rho\cos(\theta)\\ y=\rho\sin(\theta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\cos(\theta)\,\mathrm{d}\rho-\rho\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}y=\sin(\theta)\,\mathrm{d}\rho+\rho\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{cases}$

  Notons L_1 et L_2 les deux lignes du système précédent.

  En formant $\begin{cases}\cos(\theta)L_1+\sin(\theta)L_2\\ -\sin(\theta)L_1+\cos(\theta)L_2\end{cases}$ on trouve $\begin{cases}\mathrm{d}\rho=\cos(\theta)\ \mathrm{d}x+\sin(\theta)\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}\theta=-\dfrac{\sin(\theta)}{\rho}\ \mathrm{d}x+\dfrac{\cos(\theta)}{\rho}\ \mathrm{d}y\end{cases}$

  Par identification, on retrouve bien : $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=\cos(\theta)$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}=\sin(\theta)$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin(\theta)}{\rho}$ et $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{\cos(\theta)}{\rho}$.

12.1.7 Vecteur gradient, et notation ∇f

Définition 12.1.6 (vecteur gradient en un point a de U d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U)
Soit $f\colon U\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Soit a un point de U.
On appelle *vecteur gradient de f en a* le vecteur $\nabla f(a)=\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a),\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a)\Big)$ de $\mathbb{R}^p$.

On peut bien sûr préférer la notation : $\nabla(f)(a)=(\partial_1 f(a),\partial_2 f(a),\ldots,\partial_p f(a))$.

On dispose ainsi d'une fonction ∇f, définie sur $U\subset\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

On peut considérer cette fonction comme un « champ de vecteurs » sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

Tout se passe donc comme si en tout point a de U était « planté » le vecteur $\nabla f(a)$.

▷ Interprétation de la différentielle en termes de gradient

On suppose ici que $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure d'espace euclidien canonique.

Pour tout a de $U \subset \mathbb{R}^p$, et pour tout h de $\mathbb{R}^p$, on a l'égalité $\boxed{\mathrm{d}f(a)\cdot h = (\nabla f(a) \mid h)}$

On comprend mieux la notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$ préférée à $\mathrm{d}f(a)(h)$ et qui fait penser à un produit scalaire.

Le développement limité de f en a s'écrit donc : $f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \mathrm{o}(\|h\|)$.

▷ Dérivée le long d'un arc $\mathcal{C}^1$, et interprétation du gradient

On reprend les notations de la proposition 12.1.6. On notera parfois M plutôt que $M(t)$, pour simplifier.

Le vecteur vitesse, au point M de l'arc, est $M'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_p'(t))$.

On sait que ce vecteur, s'il est non nul, dirige la tangente en M au support de l'arc.

On sait que le gradient de f en M est $\nabla f(M) = (\partial_1 f(M), \partial_2 f(M), \ldots, \partial_p f(M))$.

En utilisant la différentielle de f en M, la dérivée de $\varphi(t) = f(M(t))$ s'écrit : $\varphi'(t) = \mathrm{d}f(M)\cdot M'(t)$

En utilisant le vecteur gradient de f en M, elle s'écrit : $\forall\, t \in I,\ \varphi'(t) = (\nabla f(M) \mid M'(t))$.

Autrement dit, on effectue le produit scalaire du gradient de f en M (qui « préexiste » à la définition d'un arc paramétré passant par le point M) et du vecteur vitesse $M'(t)$. En termes imagés (mais qui sont au programme) on calcule ici la *dérivée de f le long de l'arc.*

Il est clair (même si c'est exprimé en termes assez vagues) qu'on maximise l'augmentation des valeurs de f en se déplaçant « dans le sens du gradient ». Au contraire, on va conserver à f une valeur constante si on déplace en permanence « perpendiculairement au gradient ». Si on veut voir diminuer les valeurs de f le plus vite possible, on doit se déplacer « dans le sens opposé au gradient ».

Toujours en termes imagés, la fonction gradient ∇f indique donc toujours, en un point a de U, le sens de la « plus grande augmentation instantanée » de f. Par exemple, à la surface du globe, le vent souffle toujours dans le sens du vecteur $-\nabla P$, où P est la pression athmosphérique.

▷ Loi de Fourier

Par prudence, on s'adressera ici au professeur de Sciences Physiques.

On se contentera ici de citer Wikipedia (fr.wikipedia.org/wiki/Conduction_thermique) :

> *La conduction thermique est un transfert thermique spontané d'une région de température élevée vers une région de température plus basse.*
>
> *Elle est décrite par la loi dite de Fourier établie mathématiquement par Jean-Baptiste Biot en 1804 puis expérimentalement par Fourier en 1824.*
>
> *La densité de flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température :* $\overrightarrow{\varphi} = -\lambda\,\nabla T$.
>
> *La constante λ, toujours positive, est nommée conductivité thermique du matériau.*
>
> *Avec les unités du SI, λ s'exprime en* `J.m⁻¹.K⁻¹.s⁻¹`*, soit des* `W.m⁻¹.K⁻¹`*.*
>
> *La densité de flux de chaleur $\overrightarrow{\varphi}$ s'exprime en* `W.m⁻²`*, et la température T en* `K`*.*
>
> *La loi de Fourier est une loi semi-empirique analogue à la loi de Fick pour la diffusion de particule ou la loi d'Ohm pour la conduction électrique (Ohm s'est d'ailleurs servi d'une analogie entre thermique et électricité pour construire sa théorie). Ces trois lois peuvent s'interpréter de la même façon : l'inhomogénéité d'un paramètre intensif (température, nombre de particules par unité de volume, potentiel électrique) provoque un phénomène de transport tendant à combler le déséquilibre (flux thermique, courant de diffusion, courant électrique).*

▷ Potentiel électrostatique

Mêmes remarques que pour la loi de Fourier.

> *On considère le champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé en un point M (chargé électriquement) de l'espace par une distribution de charges électriques. Il est calculé par application de la loi de Coulomb et par un principe de superposition.*
>
> *On dit que le champ électrique $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel, en ce sens qu'il existe une fonction numérique V telle que $\overrightarrow{E} = -\nabla V$.*
>
> *Le potentiel électrique, exprimé en volts (symbole V), est l'une des grandeurs définissant l'état électrique d'un point de l'espace.*
>
> *La différence de potentiel électrique entre deux points de l'espace ou d'un circuit permet de calculer la variation d'énergie potentielle d'une charge électrique ou de trouver plusieurs tensions inconnues dans un circuit électrique ou électronique.*

▷ Complément : calcul du gradient en polaires

On reprend les notations $f(x, y) = g(\rho, \theta)$ de la sous-section 12.1.6.

On rappelle les égalités : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial \rho} - \dfrac{\sin(\theta)}{\rho}\,\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin(\theta)\,\dfrac{\partial g}{\partial \rho} + \dfrac{\cos(\theta)}{\rho}\,\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$.

Avec des notations classiques, on note $\overrightarrow{u}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $\overrightarrow{v}(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

On peut alors écrire :

$$\nabla f \;= \Big(\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\sin(\theta)}{\rho}\,\frac{\partial g}{\partial \theta},\ \sin(\theta)\,\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\cos(\theta)}{\rho}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\Big) = \frac{\partial g}{\partial \rho}\,\overrightarrow{u}(\theta) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\,\overrightarrow{v}(\theta)$$

12.2 Applications géométriques

12.2.1 Courbes $f(x, y) = 0$ du plan, avec f de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 12.2.1 (courbe d'équation $f(x, y) = 0$)
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$.
L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $f(x, y) = 0$ est appelé *courbe d'équation* $f(x, y) = 0$.

Remarques sur la définition

- A priori une courbe peut être vide, mais dans ce cas l'intérêt est mince.
- Soit (Γ) une courbe du plan, et soit $t \mapsto M(t)$ un arc paramétré plan, défini sur un intervalle I.
  Si le support (l'ensemble des points $M(t)$) de l'arc est (Γ), on dit que l'arc est une représentation paramétrique (ou un paramétrage) de la courbe (Γ).
- On évitera de confondre une courbe (Γ) (ici un ensemble de points du plan) avec un paramétrage de cette courbe (c'est-à-dire une façon de la parcourir).

Définition 12.2.2 (point régulier sur la courbe $f(x, y) = 0$)
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, et soit (Γ) la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.
On dit qu'un point A de la courbe (Γ) est régulier si $\nabla f(A) \neq 0$.

Ce n'est pas une propriété de A seul, mais une propriété de A en tant qu'élément de (Γ). Dire que A est régulier sur (Γ), c'est donc dire que la différentielle de f en A n'est pas la forme linéaire nulle, ou encore (plus simplement) que l'une au moins des deux dérivées partielles de f en A est non nulle.

Proposition 12.2.1 (paramétrage local en un point régulier de la courbe $f(x,y)=0$)
Soit $f\colon U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, et soit (Γ) la courbe d'équation $f(x,y)=0$.

Soit A un point régulier de (Γ). Alors il existe $\delta>0$ et un arc paramétré $t\mapsto M(t)$ régulier, injectif et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I, tels que $(\Gamma)\cap\mathcal{B}(A,\delta)=\{M(t),\ t\in I\}$.
On dit alors que l'arc $t\mapsto M(t)$ est un paramétrage local *de la courbe (Γ) au voisinage de A.*

Dire que l'arc $t\mapsto M(t)$ est injectif est important car cela nous assure que chaque point de la courbe est, du moins au voisinage de A, obtenu pour une et une seule valeur du paramètre t.
Dire que l'arc $t\mapsto M(t)$ est régulier signifie que le vecteur vitesse $M'(t)$ ne s'annule jamais.
Il n'y a pas (du tout) unicité d'un paramétrage local d'une courbe au voisinage d'un point régulier.

▷ **Un exemple très simple**

Soit (Γ) la courbe d'équation $f(x,y)=0$, avec $f(x,y)=x^2+y^2-1$.

Tout le monde aura reconnu le cercle unité !

Le vecteur $\nabla f(x,y)=(2x,2y)$ n'est jamais nul sur (Γ), donc il y a un paramétrage local en tout point.

- il y a d'ailleurs un paramétrage global : $t\mapsto(\cos(t),\sin(t))$.
- au point $A(0,1)$, on a $\partial_2 f(A)\neq 0$: il y a le paramétrage local $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$;
  ce paramétrage n'est pas global car il ne permet que de retrouver la moitié $y>0$ du cercle.
- au point $B(1,0)$, on a $\partial_1 f(A)\neq 0$: il y a le paramétrage local $x=\sqrt{1-y^2}$ $(-1<y<1)$;
  ce paramétrage n'est pas global car il ne permet que de retrouver la moitié $x>0$ du cercle.
- au point $C(0,-1)$, on a $\partial_2 f(A)\neq 0$: il y a le paramétrage local $y=-\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$;
  ce paramétrage n'est pas global car il ne permet que de retrouver la moitié $y<0$ du cercle.

▷ **Paramétrage local du type $y=\varphi(x)$ ou $x=\psi(y)$**

On peut préciser le résultat précédent (en conservant les mêmes notations).
- si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\neq 0$, il existe un paramétrage local du type $y=\varphi(x)$, avec φ de classe $\mathcal{C}^1$.
- si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)\neq 0$, il existe un paramétrage local du type $x=\psi(y)$, avec ψ de classe $\mathcal{C}^1$.
- en d'autres termes, au voisinage d'un point régulier, la courbe (Γ) possède (localement) une équation dans laquelle l'une des variables (y ou x) est fonction de l'autre.

▷ **Tangente à une courbe en un point régulier de celle-ci**

Soit $t\in I\mapsto f(t)=(x(t),y(t))$ un paramétrage injectif local de la courbe d'équation $f(x,y)=0$ au voisinage d'un point régulier $A(a,b)$.

On suppose que le point A est obtenu pour la valeur t_0 du paramètre t : on écrira donc $A=M(t_0)$.

Par définition, la fonction $t\mapsto f(x(t),y(t))$ est identiquement nulle sur I.

Par dérivation, on en déduit : $\forall t\in I,\ x'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(M(t))+y'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(M(t))=0$.

Cette égalité s'écrit $(M'(t) \mid \nabla f(M(t)) = 0$, et en particulier $(M'(t_0) \mid \nabla f(M(t_0)) = 0$.

On sait que le vecteur $M'(t_0)$ (qui est non nul) dirige la tangente au support de l'arc en $A = M(t_0)$ (et on rappelle que le support de l'arc est inclus dans la courbe (Γ)).

On voit de plus que cette tangente est aussi la droite qui passe par A est orthogonale au gradient $\nabla f(A)$.

On en déduit une définition de la tangente en un point régulier de la courbe $f(x, y) = 0$ où f est $\mathcal{C}^1$ (et cette définition est indépendante du choix d'un paramétrage local) :

Proposition 12.2.2 (tangente en un point régulier d'une courbe $f(x, y) = 0$, où f est $\mathcal{C}^1$)
Soit $A(a, b)$ un point régulier d'une courbe (Γ) d'équation $f(x, y) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$.
On appelle tangente *en A à (Γ) la droite passant par A et orthogonale à $\nabla f(A)$.*
Son équation est : $(x-a)\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + (y-b)\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$, *ou encore* $\left(\overrightarrow{AM} \mid \nabla f(A)\right) = 0$.

On peut dire que la droite passant par A et dirigée par $\nabla f(A)$ est la *normale* à la courbe en A.

Exemple : tangente en un point à une conique

Considérons la courbe $F(x, y) = px^2 + qy^2 + rxy + sx + ty + u = 0$, où p, q, r, s, t, u sont réels.

Pour tout point $A(a, b)$ de (Γ), on a $\partial_1(f)(A) = 2pa + rb + s$ et $\partial_2(f)(A) = 2qb + ra + t$.

L'équation de la tangente en A est

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AM} \mid \nabla F(A)\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow\ (x-a)(2pa + rb + s) + (y-b)(2qb + ra + t) = 0\\
&\Leftrightarrow\ 2pax + 2qby - 2(pa^2 + qb^2 + rab) + r(bx + ay) + sx + ty - sa - tb = 0\\
&\Leftrightarrow\ 2pax + 2qby + 2(sa + tb + u) + r(bx + ay) + sx + ty - sa - tb = 0\\
&\Leftrightarrow\ pax + qby + r\frac{ay + bx}{2} + s\frac{a + x}{2} + t\frac{b + y}{2} + u = 0
\end{aligned}$$

Il y a un moyen mnémotechnique ici : la tangente en $A(a, b)$ s'obtient par « dédoublement des variables » :

Dans l'équation de (Γ), on remplace x^2 par ax, y^2 par by, xy par $\dfrac{xb + ay}{2}$, x par $\dfrac{a + x}{2}$ et y par $\dfrac{b + y}{2}$.

Attention cette « recette » est réservée aux *coniques*, c'est-à-dire aux courbes dont l'équation peut s'écrire $f(x, y) = 0$, où f est un polynôme de degré 2 en les variables x et y.

Par exemple, on vérifie que le point $(1, 2)$ appartient à la conique d'équation $x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 1 = 0$.

La tangente en A à cette conique est $x + 2y - 2(2x + y) + (x + 1) + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$.

Sans « recette », on écrit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 4y + 2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4x$ donc $\nabla f(A) = (-4, 0)$.

L'équation de la tangente en $A(1, 2)$ est donc $-4(x - 1) + 0(y - 2) = 0$, c'est-à-dire $x = 1$.

Exercice : trouver (de deux façons) un paramétrage local de (Γ) (une hyperbole) au voisinage de A.

12.2.2 Ligne de niveau, équipotentielles, lignes de champ

Définition 12.2.3 (lignes de niveau de $f \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U de $\mathbb{R}^2$)
Soit $f \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U.
On appelle *ligne de niveau* de f toute courbe d'équation $f(x, y) = \lambda$, où λ est un réel.

▷ Un premier exemple avec Python

On trace ici quelques lignes de niveaux de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy + 2x$. Ce sont des hyperboles (de même centre et de mêmes asymptotes, mais l'étude des coniques n'est plus vraiment au programme...)

Les lignes $f(x,y) = \lambda$ sont tracées en traits continus si $\lambda \geqslant 0$, et en pointillés si $\lambda < 0$.

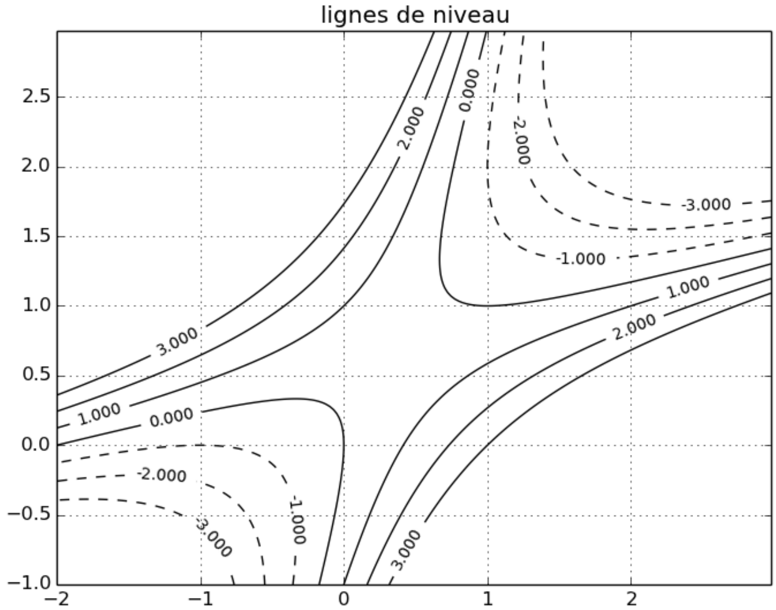
On retrouve en particulier la courbe (Γ) d'équation $f(x,y) = -1$, avec sa tangente verticale en $A(1,2)$.

```
from pylab import *

delta = 0.025
x = arange(-2.0, 3.0, delta)
y = arange(-1.0, 3.0, delta)
X, Y = meshgrid(x, y)
f = X*X + Y*Y - 4*X*Y + 2*X + 1

k = np.linspace(-3,3,7)
CS = contour(X,Y,f,k,colors='black')
clabel(CS, inline=1, fontsize=10)
title('lignes de niveau')

grid()
show()
```

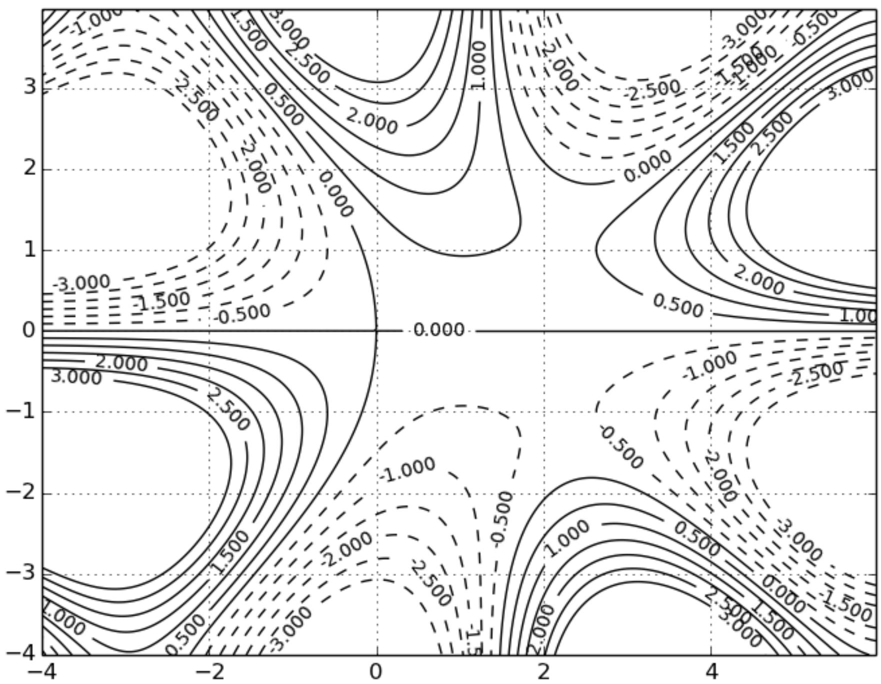


▷ Un deuxième exemple avec Python

Voici un autre exemple, avec $f(x,y) = (x-1)\sin(y) + y\cos(x)$.

```
from pylab import *
delta = 0.025
x = arange(-4.0, 6.0, delta); y = arange(-4.0, 4.0, delta); X, Y = meshgrid(x, y)
f = (X-1)*sin(Y)+Y*cos(X)
k = np.linspace(-3,3,13); CS = contour(X, Y, f, k, colors='black',linestyle=None)
clabel(CS, inline=1, fontsize=10)
title('lignes de niveau'); grid(); show()
```

Et voici le résultat. On est prié d'expliquer la symétrie de l'ensemble par rapport à l'axe Ox et surtout d'expliquer ce qui se passe au point $(0,0)$.



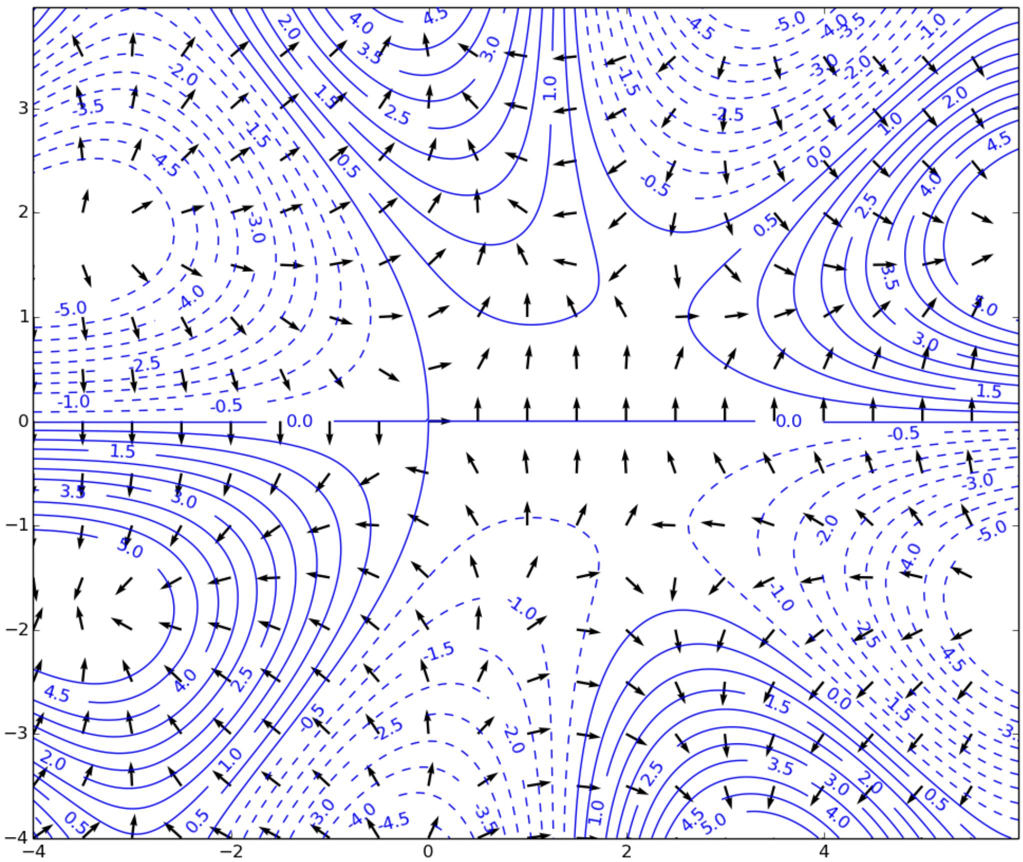
▷ **Orthogonalité du gradient avec les lignes de niveau**

Proposition 12.2.3 (orthogonalité du gradient avec les lignes de niveau)
Soit $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U.
Soit (Γ_λ) une ligne de niveau de f, d'équation $f(x,y) = \lambda$.
Soit A un point régulier de (Γ_λ), donc tel que $\nabla f(A) \neq \overrightarrow{0}$.
Le vecteur $\overrightarrow{n} = \nabla f(A)$ est orthogonal à la tangente en A à (Γ_λ).
De plus, la fonction $\varphi\colon t \mapsto f(A + t\overrightarrow{n})$ est strictement croissante au voisinage de $t = 0$.

Au point A, le vecteur $\nabla f(A)$ est donc orienté « dans le sens des valeurs croissantes de f ».

On voit ci-dessous le code Python pour afficher simultanément des lignes de niveau de la fonction $f(x,y) = (x-1)\sin(y) + y\cos(x)$, et une représentation fléchée des vecteurs gradients de f en des points régulièrement espacés sur une grille.

```
from pylab import *
def grille(delta):
    x = arange(-4.0, 6.0, delta);  y = arange(-4.0, 4.0, delta)
    return meshgrid(x, y)
X, Y = grille(0.5); dfx = sin(Y)-Y*sin(X); dfy = (X-1)*cos(Y)+cos(X)
A = np.arctan2(dfy, dfx); U,V = np.cos(A), np.sin(A)
plt.quiver(X,Y,U,V,color='black',width=0.0025,scale=40)
X, Y = grille(0.025); f = (X-1)*sin(Y)+Y*cos(X)
k = np.linspace(-5,5,21); CS = contour(X, Y, f, k, colors='blue')
clabel(CS, inline=1, fontsize=12,fmt='%1.1f'); show()
```



▷ **Équipotentielles, lignes de champ**

On se donne une *fonction potentiel* V de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

Pour tout point M de Ω, on pose $\overrightarrow{E}(M) = -\nabla V(M)$.

On définit ainsi un « champ de vecteurs » sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Les « lignes de champ » sont des courbes de Ω qui admettent, en permanence, le vecteur $\overrightarrow{E}(M)$ comme vecteur tangent (ou, ce qui revient au même, le vecteur gradient $\nabla V(A)$).

Les « équipotentielles » sont les lignes de niveau de V (ou, ce qui revient au même, de $-V$).

En tout point M de Ω, le vecteur gradient (qui dirige la tangente à la ligne de champ passant par A) est orthogonal à l'équipotentielle passant par A. De plus, ce vecteur indique la direction dans laquelle augmente $-V$, c'est-à-dire dans laquelle diminue le potentiel V.

Conclusion : pour un champ de vecteurs $M \mapsto \overrightarrow{E}(M)$ qui « dérive d'un potentiel », c'est-à-dire pour lequel il existe une fonction $M \mapsto V(M)$ à valeurs réelles telle que $\overrightarrow{E} = -\nabla V$, alors :
- les équipotentielles et les lignes de champ se coupent toujours orthogonalement ;
- le vecteur $\overrightarrow{E}(M)$ est toujours dirigé dans le sens de la diminution du potentiel V.

12.2.3 Surfaces $f(x, y, z) = 0$ de l'espace, avec f de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 12.2.4 (surface d'équation $f(x, y, z) = 0$)
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$.
L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $f(x, y, z) = 0$ est appelé *surface d'équation* $f(x, y, z) = 0$.

Définition 12.2.5 (point régulier sur la surface $f(x, y, z) = 0$)
Soit $f\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, et soit (Σ) la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.
On dit qu'un point A de la surface (Σ) est régulier si $\nabla f(A) \neq 0$.
On dit que la surface (Σ) est régulière si tous ses points sont réguliers.

▷ Arc régulier tracé sur une surface régulière

Soit $f\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, et soit (Σ) la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

Soit $t \in I \mapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, défini sur un intervalle ouvert I.

On suppose que cet arc est régulier, c'est-à-dire : $\forall\, t \in I,\ M'(t) \neq \overrightarrow{0}$.

On dit que l'arc $t \mapsto M(t)$ est « tracé sur la surface » (Σ) si : $\forall\, t \in I,\ M(t) \in (\Sigma)$.

Par définition, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ est identiquement nulle sur I.

Par dérivation, on en déduit : $\forall\, t \in I,\ x'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(M(t)) + y'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(M(t)) + z'(t)\dfrac{\partial f}{\partial z}(M(t)) = 0$.

Cette égalité s'écrit $\forall\, t \in I,\ (M'(t) \mid \nabla f(M(t)) = 0$.

Or on sait que le vecteur $M'(t)$ (qui est non nul) dirige la tangente à l'arc en $M(t)$.

La tangente en un point $M(t)$ d'un arc tracé sur (Σ) est donc en permanence orthogonale au vecteur gradient de f en $M(t)$, c'est-à-dire est dans le plan $\Pi(t)$ orthogonal en $M(t)$ à ce vecteur gradient.

Cela nous amène à la définition suivante, qui généralise la définition 12.2.2.

Proposition 12.2.4 (plan tangent en un point régulier d'une surface $f(x, y, z) = 0$, où f est $\mathcal{C}^1$)
Soit $A(a, b, c)$ un point régulier d'une surface (Σ) d'équation $f(x, y, z) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$.
On appelle plan tangent *en A à (Σ) le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\nabla f(A)$.*
Son équation est : $(x - a)\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + (y - b)\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) + (z - c)\dfrac{\partial f}{\partial z}(A) = 0$, ou encore $\big(\overrightarrow{AM} \mid \nabla f(A)\big) = 0$.

▷ Représentation $z = g(x, y)$ au voisinage d'un point à gradient non horizontal

Soit $A(a, b, c)$ un point régulier de la surface (Σ) la d'équation $f(x, y, z) = 0$.

On suppose plus précisément que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A) \neq 0$, c'est-à-dire que $\nabla f(A)$ n'est pas « horizontal ».

Alors il existe une boule ouverte $B(A, \delta)$ de centre A, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ contenant (a, b), et une fonction $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, M(x, y, z) \in B(A, \delta),\ f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$.

En d'autres termes, au voisinage d'un point où la composante verticale du gradient n'est pas nulle, la surface (Γ) possède (localement) une équation du type $z = g(x, y)$.

Si la composante verticale du gradient est nulle, on peut adapter ce qui précède à l'une des coordonnées x ou y et conclure à une représentation $x = h(y, z)$ ou $y = h(x, z)$.

▷ « Courbes coordonnées » tracées sur une surface $z = g(x, y)$

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit (Σ) la surface d'équation $z = g(x, y)$, et soit $A = (a, b, c)$ un point de (Σ) (donc $c = g(a, b)$).

On appelle « courbes coordonnées au point A de (Σ) » les deux arcs paramétrés suivants :

– d'une part l'arc $x \mapsto (x, b, g(x, b))$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert contenant a) ;
  le support de cet arc est dans l'intersection de (Σ) avec le plan $y = b$ (parallèle à Oxz).
– d'une part l'arc $y \mapsto (a, y, g(a, y))$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert contenant a).
  le support de cet arc est dans l'intersection de (Σ) avec le plan $x = a$ (parallèle à Oyz).

En termes plus imagés, ces deux arcs passant par A sont les intersections de la surface (Σ) et des deux plans parallèles à Oxz et Oyz et passant par A.

Supposons que l'ouvert Ω s'écrive $\Omega = I \times J$, où I et J sont deux intervalles ouverts.
Si on se donne une suite arithmétique $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de I et une suite arithmétique $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de J, le tracé de chaque courbe coordonnée $(\Gamma_{i,j})$ passant par $A_{ij} = (a_i, b_j, g(a_i, b_j))$ constitue un « maillage » dont le tracé donne une allure raisonnablement précise de la surface (Σ) (si ce maillage est assez « serré »).

Cette méthode est souvent utilisée par les logiciels pour obtenir un rendu d'une surface à l'écran.

▷ **Illustration du plan tangent en un point d'une surface** $z = f(x, y)$

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit (Σ) la surface d'équation $z = g(x, y)$, c'est-à-dire $f(x, y, z) = 0$ avec $f(x, y, z) = g(x, y) - z$.

Plaçons-nous au voisinage d'un point $A = (a, b, c)$ de (Σ), donc tel que $c = g(a, b)$.

Le gradient de $f(x, y, z) = g(x, y) - z$ en A est :

$$\nabla f(A) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial z}(A)\Big) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b), -1\Big)$$

Le plan tangent à (Σ) en A a pour équation : $(x-a)\dfrac{\partial g}{\partial x}(a, b) + (y-b)\dfrac{\partial g}{\partial y}(a, b) - (z-c) = 0$.

Cette équation se réduit bien sûr en : $z = g(a, b) + (x-a)\dfrac{\partial g}{\partial x}(a, b) + (y-b)\dfrac{\partial g}{\partial y}(a, b)$.

Par ailleurs, pour tout couple $u = (x, y)$ assez voisin de $u_A = (a, b)$, on a le développement limité :

$$z = g(x, y) = g(a, b) + (x-a)\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) + (y-b)\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) + \mathrm{o}(\|u - u_A\|)$$

Ces résultats illustrent la nature du plan tangent à la surface (Σ) au point A.

Ce plan constitue en effet la meilleure « approximation plane locale » de (Σ).
Ce plan varie « continuement » en fonction de la position de A sur (Σ) (car g est de classe $\mathcal{C}^1$).

Le vecteur $\overrightarrow{n} = \Big(\dfrac{\partial g}{\partial x}(a, b), \dfrac{\partial g}{\partial y}(a, b), -1\Big)$ dirige la normale au plan, donc à la surface (Σ), au point A.

Voici un exemple utilisant le logiciel Maple, où on a tracé d'abord la surface (Σ) d'équation $z = x^3y - y^3x$.

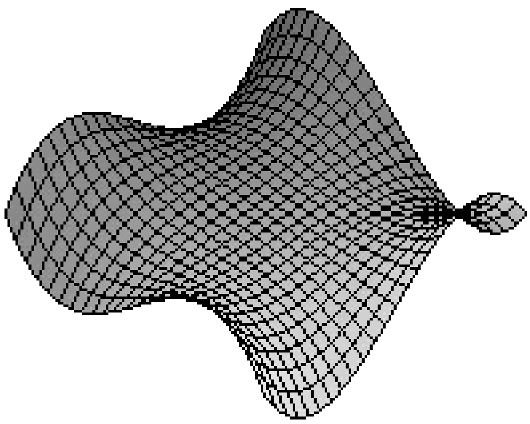
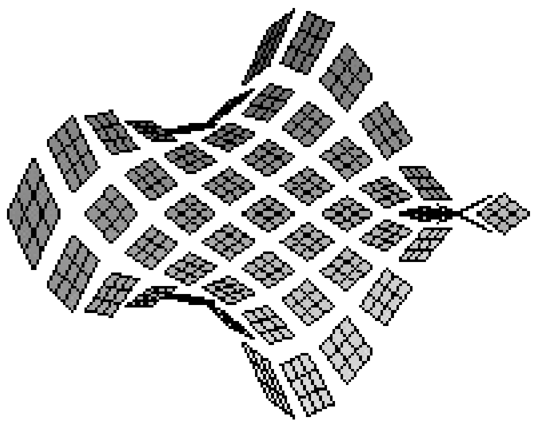
Le tracé obtenu à gauche illustre bien la méthode utilisée par le logiciel et qui consiste à représenter un réseau de courbes coordonnées tracées sur la surface.

On en ensuite tracé des « bouts de plans tangents » à (Σ), en des points régulièrement espacés.

On voit que ces bouts de plans tangents donnent une bonne idée de l'allure générale de (Σ).

```
> g:=(x,y)->x^3*y-y^3*x:
  P:=NULL:
  for a from -0.9 to 0.9 by 0.3 do
```

```
    for b from -0.9 to 0.9 by 0.3 do
      P:=P,plot3d(g(a,b)+D[1](g)(a,b)*(x-a)+D[2](g)(a,b)*(y-b),
                    x=a-0.1..a+0.1,y=b-0.1..b+0.1,numpoints=9)
    od;
  od:
  plot3d(g,-1..1,-1..1,scaling=constrained);
  plots[display]({P},scaling=constrained);
```

12.3 Dérivées partielles d'ordre deux

12.3.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 12.3.1 (dérivées partielles d'ordre 2)
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.
Les fonctions dérivées partielles $\partial_i f$ sont donc définies et continues sur U.
Soit a un point de U, et soit i, j deux indices dans $[\![1, p]\!]$.
La i-ème dérivée partielle de $\partial_j f$ en a (si elle existe) est notée $\partial^2_{i,j}(a)$, ou encore $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)$.
Si $i = j$, on écrit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ plutôt que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_i}(a)$.
On définit ainsi, sous réserve d'existence, les *fonctions dérivées partielles secondes* de f.

Pour des variables nommées x, y, z, on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(a)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, etc.

Définition 12.3.2 (fonction de classe $\mathcal{C}^2$)
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.
f est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si ses fonctions dérivées partielles secondes y sont définies et continues.

Proposition 12.3.1 (théorème de Schwarz)
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U.
Pour tous indices distincts i et j, les fonctions dérivées partielles secondes $\partial^2_{i,j}$ et $\partial^2_{j,i}$ sont identiques.

En d'autres termes, on a l'égalité des fonctions dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$.

▷ Un exemple de résultats égaux... mais de calculs inégaux

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, l'ordre dans lequel on calcule les « dérivées partielles croisées » est sans importance. Mais les calculs nécessaires pour obtenir ces résultats égaux peuvent être assez différents.

Posons par exemple $f(x,y) = x\arctan\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, sur $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

On trouve $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{2x(x^2+y^2)-2x^3}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Inversement, on a d'abord $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x}\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = \arctan\dfrac{y}{x} - \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Finalement : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} - x\dfrac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + x\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

▷ Complément : un exemple où le théorème de Schwarz ne s'applique pas

L'exemple suivant est très technique. C'est pour la culture générale.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0)=0$ et $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$.

La fonction f est identiquement nulle sur les axes Ox et Oy. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est une fraction rationnelle.

Si $(x,y)\neq(0,0)$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$.

En majorant assez largement, on trouve $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2\,|y|$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2\,|x|$.

On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tendent vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (toujours parce que c'est une fraction rationnelle).

On va maintenant voir que f possède des dérivées partielles d'ordre 2 à l'origine.

On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$ (car les fonctions partielles en $(0,0)$ sont identiquement nulles).

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe, on l'obtient en calculant $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0)$.

Or, pour $h\neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(h,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{h(h^2-k^2)}{h^2+k^2} = h$. Ainsi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$.

De même, si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe, on l'obtient en calculant $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}$.

Or, pour $k \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} f(h,k) = -k$. On en déduit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

On constate donc que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existent mais ont des valeurs différentes.

En vertu du théorème de Schwarz, la fonction f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Important : on a trouvé $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ sans utiliser les *fonctions* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais seulement par des calculs de limites de taux d'accroissement.

D'ailleurs, c'eût été une erreur de chercher à calculer les dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$ à partir de leur expression sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, non seulement parce que le calcul est compliqué, mais surtout parce qu'il est inutile (ces dérivées partielles ont une discontinuité à l'origine) :

On trouverait en effet, pour $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}$.

On constate par exemple que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,x) = 0$, ce qui prouve qu'il y a discontinuité en $(0,0)$.

12.3.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles

▷ **L'équation du transport linéaire**

C'est l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, avec la « condition intiale » $u(x,0) \equiv u_0(x)$.

Elle peut modéliser par exemple la concentration des particules d'un polluant dans un liquide « linéaire », quand on se donne une concentration $u_0(x)$ à l'instant $t = 0$.

▷ **L'équation de diffusion thermique linéaire**

C'est l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, avec $\alpha > 0$, où $u(x,t)$ est défini sur $[0,L] \times \mathbb{R}^+$.

Elle modélise la diffusion de la chaleur dans une barre $0 \leqslant x \leqslant L$ en fonction du temps t.

On se donne les conditions initiales :

– d'une part : $u(x,0) = f(x)$ (qui représente la chaleur en un point x de la barre à l'instant $t = 0$)

– d'autre part : $u(0,t) = u(L,t) = 0$ pour $t \geqslant 0$ (chaleur maintenue à 0 aux extrémités de la barre).

On cherche une solution sous la forme $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

▷ **L'équation de propagation des ondes**

C'est l'équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ et la condition initiale $u(x,0) = f(x)$.

Elle régit la propagation d'une onde sonore de vitesse v en milieu linéaire uniforme.

▷ **Une équation aux dérivées partielles du premier ordre**

On demande de déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telles que : $x\dfrac{\partial f}{\partial y} = y\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

▷ **Une équation aux dérivées partielles d'ordre 2**

On demande de déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} = 0$.

12.4 Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Définition 12.4.1 (extremum global)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et soit f une fonction définie sur U, à valeurs réelles. Soit a un point de U.
– on dit que f présente un *maximum global* en a si : $\forall\, x \in U,\ f(x) \leqslant f(a)$.
– on dit que f présente un *minimun global* en a si : $\forall\, x \in U,\ f(x) \geqslant f(a)$.
– on dit que f présente un *extremum global en a* si elle y présente un maximum ou un minimum global.

Définition 12.4.2 (extremum local)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et soit f une fonction définie sur U, à valeurs réelles.
Soit a un point de U. On dit que f présente en a :
– un *maximum local* s'il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall\, x \in U,\ \|x - a\| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \leqslant f(a)$.
– un *minimum local* s'il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall\, x \in U,\ \|x - a\| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant f(a)$.
– un *extremum local* si elle y présente un maximum ou un minimum local.

Évidemment, un extremum global est un extremum local, et la réciproque est fausse.

Définition 12.4.3 (point critique d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.
On dit qu'un point a de U est un *point critique* de f si le vecteur gradient $\nabla f(a)$ est nul.

Un point critique de f est donc un point en lequel les dérivées partielles premières de f sont nulles.

Proposition 12.4.1 (les extremums d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sont des points critiques)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.
Soit a un point de U. On suppose que f présente en a un extremum relatif.
Alors a est un point critique de la fonction f.

La réciproque est fausse comme on le voit avec $f(x, y) = xy$, en effet :
– le point $(0, 0)$ est critique pour f
– sur toute boule ouverte de centre $(0, 0)$, f prend des valeurs positives et des valeurs négatives.

▷ Exemples de recherche d'extremums

– Déterminer les extremums éventuels (et leur nature) sur $\mathbb{R}^2$ pour $f\colon (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.
– Déterminer les extremums éventuels (et leur nature) sur $\mathbb{R}^2$ pour $f\colon (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.
– Extremums éventuels sur $[0, \pi]^2$ pour $f\colon (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \cos(x + y)$.
– Extremums de $f\colon (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ sur la boule fermée de centre $\overrightarrow{0}$ et de rayon r.

12.5 Quelques exercices

Exercice 12.1 (⇝ **corrigé**)

1. Soit A l'ensemble de définition de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$. Montrer que A est un ouvert.
2. En quels points de A, la fonction f est-elle continue ?
3. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12.2 (⇝ **corrigé**)

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 12.3 (⇝ **corrigé**)

Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherche les fonctions $u : (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$(\star) \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2tx\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad u(0, x) = u_0(x).$

1. Si u est une solution, trouver des fonctions $t \mapsto X(t)$ telles que $\varphi : t \mapsto u(t, X(t))$ soit constante.
2. Résoudre l'équation (*).

Exercice 12.4 (⇝ **corrigé**)

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tels que $(\star)$:

$\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R} : f(tx, ty) = t^m f(x, y)\ (\star)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0\ (\star\star)$.

1. Montrer que f vérifie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = mf(x, y)$, puis montrer que f vérifie :
$$\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = m(m-1)f(x, y).$$
2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto f(\cos\theta, \sin\theta)$. Vérifier que : $h'' + m^2 h = 0$.
3. En déduire que f est une fonction polynomiale en x et y.
4. Déterminer toutes les fonctions vérifiant $(\star)$ et $(\star\star)$ dans le cas où $m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12.5 (⇝ **corrigé**)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives.

Soit $B \in \mathbb{R}^n$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(X) = X^\top A\, X - 2\, B^\top X$.

1. Calculer le gradient de f.
2. Montrer que f possède un minimum et le déterminer.

Exercice 12.6 (⇝ **corrigé**)

Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}^3$ de $f\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-2xyz$.

Exercice 12.7 (⇝ **corrigé**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $A_\lambda = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = n\lambda\right\}$.

Soit $f\colon A_\lambda \to \mathbb{R},\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i)$.

1. Montrer que f possède un seul extrémum local sur A_λ et que c'est un minimum local.
2. Montrer que ce minimum local est en fait un minimum absolu.
3. Montrer que f est minorée sur A_λ, et déterminer $\mu_n(\lambda) = \inf_{x\in A_\lambda} f(x)$.

Exercice 12.8 (⇝ **corrigé**)

Soit $n \geqslant 3$, $h = \dfrac{1}{n}$, $D_1 = \dfrac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_2 = \dfrac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On définit dans $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire $(X \mid Y)_h = h\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k$ et on note $\|\ \|_h$ la norme associée.

Soient $V \in \mathbb{R}^n$ et $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ X \mapsto \dfrac{1}{2}\|D_1 X\|_h^2 - (V \mid X)_h$.

On se propose de démontrer que f possède un minimum.

1. Vérifier que : $D_1^\top D_1 = -D_2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer son gradient en X.
2. On pose $Y = D_1 X$. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $X_k = h\sum_{\ell=1}^{k} Y_\ell$.
   En déduire $|X_k| \leqslant \|Y\|_h$ pour tout k, puis $\|X\|_h \leqslant \|D_1 X\|_h$.
3. Montrer alors que : $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ f(X) \geqslant -\dfrac{1}{2}\|V\|_h^2$ et $\lim_{\|X\|_h\to+\infty} f(X) = +\infty$.
4. En déduire que f possède un minimum que l'on déterminera.