Chapitre 13

Équations différentielles linéaires

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

Avant toute chose, on révise un peu le programme de première année :

Exercice 13.1 (⇝ **corrigé**)
Résoudre l'équation différentielle (E) : $x(1-x^2)y' + (2x^2-1)y = x$.

13.1 Systèmes différentiels

13.1.1 Systèmes différentiels $X' = A(t)X + B(t)$

Définition 13.1.1 (système différentiel linéaire d'ordre 1)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit n dans $\mathbb{N}^*$.
Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonctions continues.
On dit que $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est solution de l'équation $X' = A(t)X+B(t)$, si :
- la fonction $t \mapsto X(t)$ est dérivable sur I.
- sur tout l'intervalle I, on a l'égalité $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Remarques

- on dit que $(S) : X' = A(t)X+B(t)$ est un *système différentiel linéaire d'ordre 1.*
- l'équation (H) : $X' = A(t)X$ est appelée *système homogène* associé à (S) ;
  c'est le cas particulier correspondant à une fonction B identiquement nulle.
- quand on dit « solution de (S) », c'est pour dire « solution sur tout l'intervalle I ».
- toute solution de (S) ou de (H) est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Proposition 13.1.1 (forme de l'ensemble des solutions de (S))
Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, toutes deux continues sur l'intervalle I.
On suppose qu'on connait une solution particulière X_p *de l'équation $(S) : X' = A(t)X+B(t)$.*
Soit $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une fonction dérivable sur I. Les conditions suivantes sont équivalentes :
- *la fonction X est solution de (S)*
- *la fonction $X - X_p$ est solution du système homogène associé $(H) : X' = A(t)X$.*

En d'autres termes, la solution générale de (S) s'écrit comme la somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (S).
Si on connait une solution particulière de (S), tout revient donc à résoudre le système (H) (on verra plus loin comment). Le résultat suivant (qui doit être admis) affirme l'existence et l'unicité d'une solution de (S) si on impose une « condition initiale » donnée (mais ce résultat ne donne pas de méthode pour construire explicitement cette solution).

Proposition 13.1.2 (théorème de Cauchy linéaire)
Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soit t_0 un élément de I, et X_0 un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Le système (S) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ possède une unique solution telle que $X(t_0) = X_0$.

Trouver cette solution, c'est résoudre le *problème de Cauchy pour la condition initiale* $X(t_0) = X_0$. Rappelons que cette solution est définie sur l'intervalle I tout entier.

13.1.2 Principe de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet de former une approximation de la solution au problème de Cauchy pour le système différentiel linéaire (S) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, avec la condition initiale $X(t_0) = X_0$.

On pose $t_k = t_0 + kh$ (avec $h > 0$ fixé).

On cherche une suite (X_k) d'approximations des vecteurs $X(t_k)$.

Supposons calculé un vecteur X_k particulier (doncune approximation du vecteur $X(t_k)$).

Soit Y la solution de (S) qui satisfait à la condition initiale $Y(t_k) = X_k$.

Le développement limité d'ordre 1 de Y en t_k est : $Y(t_k + \delta) = Y(t_k) + \delta Y'(t_k) + \overrightarrow{o}(\delta)$.

Ce développement s'écrit donc : $Y(t_k + \delta) = X_k + \delta(A(t_k)X_k + B(t_k)) + \overrightarrow{o}(h)$.

On pose alors $X_{k+1} = X_k + h(A(t_k)X_k + B(t_k))$.

À partir de (t_0, X_0), la méthode d'Euler se résume donc à : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ X_{k+1} = X_k + h(A(t_k)X_k + B(t_k)) \end{cases}$

On a supposé ici que k un entier naturel (donc on recherche une approximation pour $t \geqslant t_0$) mais on peut, en inversant le sens de la récurrence, « remonter le temps » et calculer les X_k pour k négatif (ou alors, ce qui revient au même, garder $k \geqslant 0$ mais choisir un pas $h < 0$).

Dans tous les cas, les valeurs de l'entier k sont limitées par la condition $t_k = t_0 + kh \in I$.

13.1.3 Systèmes différentiels homogènes

Proposition 13.1.3 (dimension de l'espace vectoriel des solutions de $X' = A(t)X$)

Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une fonction continue sur I.

Soit $\mathcal{S}_H$ l'espace des solutions du système homogène $(H) : X' = A(t)X$.

Soit t_0 un élément de I. L'application de $\mathcal{S}_H$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et qui à toute solution X de (H) associe sa valeur en t_0 est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Il en découle que $\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Exercice 13.2 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

Soit (S) : $\begin{cases} x'(t) = y(t) - z(t) \\ y'(t) = z(t) - x(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$, avec $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$.

1. Discuter l'existence et l'unicité de la solution $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
2. Montrer que la trajectoire est incluse dans une sphère et un plan.
3. Reconnaître l'intersection de cette sphère et de ce plan.
4. Résoudre directement (S) et retrouver le résultat de 3).

Exercice 13.3 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une solution du système différentiel $X' = AX$.

1. Montrer que l'application $t \mapsto \|X(t)\|$ est constante.

2. Soit $a \in \mathrm{Ker}(A)$. Montrer que $t \mapsto (X(t) \mid a)$ est constante.
3. En déduire que le mouvement de $X(t)$ est circulaire.

Définition 13.1.2 (système différentiel homogène à coefficients constants)
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
L'équation $X'(t) = AX(t)$ est appelé *système différentiel homogène à coefficients constants.*

Ce qui a été dit sur les systèmes différentiels (notamment homogènes) s'applique bien sûr à ce cas particulier, mais on retiendra que les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont **définies sur $\mathbb{R}$ tout entier**.

▷ Résolution lorsque A est une matrice diagonalisable

On se propose ici de résoudre le système $(H) : X'(t) = AX(t)$ quand la matrice A est diagonalisable.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

Soit P une matrice de passage vers la réduite $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. On a donc $D = P^{-1}AP$.

On effectue le changement de fonction inconnue défini par $X(t) = PY(t)$ (donc $Y(t) = P^{-1}X(t)$).

Le système (H) devient alors :

$$(H_Y) : Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t)$$

La k-ème ligne (L_k) de (H_Y) est $y_k'(t) = \lambda_k\, y_k(t)$.
Sa solution générale est $y_k(t) = \alpha_k\, \mathrm{e}^{\lambda_k t}$, avec α_k dans $\mathbb{K}$.
On en déduit la solution générale de (H_Y), qui s'écrit $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$, avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{K}^n$.

Ainsi $X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} \alpha_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$, avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, est la solution générale de (H).

Notons $U_1, \ldots, U_n$ les vecteurs colonnes de P (base de vecteurs propres de A pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

Avec ces notations, la solution générale de (H) s'écrit : $X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \mathrm{e}^{\lambda_k t}\, U_k$ avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

On retrouve bien le fait que $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Mieux, les fonctions $t \mapsto \varphi_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\, U_k$ (où les U_k forment une base de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres respectives λ_k) forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_H$.

Remarque : pour résoudre le système (H), on voit que le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire.

On conclut tout cela par une proposition :

Proposition 13.1.4 (résolution de $X'(t) = AX(t)$ quand A est diagonalisable)
Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $U_1, \ldots, U_n$ une base de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres respectives $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t}\, U_k$ forment une base de l'espace des solutions de $(H) : X'(t) = AX(t)$.

▷ Résolution dans $\mathbb{R}$, avec valeurs propres complexes

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
On veut résoudre « dans $\mathbb{R}$ » le système différentiel $(H) : X'(t) = AX(t)$

Notons $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ l'espace des solutions complexes $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ du système (H).

De même, notons $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ l'espace des solutions réelles $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de (H).

On sait que $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$) est un espace de dimension n sur $\mathbb{C}$ (resp. sur $\mathbb{R}$).

Avec les notations précédentes, on ordonne les valeurs propres de A de telle sorte que :
- d'une part : $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_4 = \overline{\lambda_3}, \lambda_{2p} = \overline{\lambda_{2p-1}}$ sont les valeurs propres complexes non réelles ; on note $U_2 = \overline{U_1}, \ldots, U_{2p} = \overline{U_{2p-1}}$ une famille libre de vecteurs propres associés ;
- d'autre part $\lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres réelles (éventuelles) de A.

À partir de la base de l'espace $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ formée des fonctions $t \mapsto \varphi_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} U_k$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) on construit une base de solutions réelles de (H) de la manière suivante :
- pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$, on remplace φ_{2k} et $\varphi_{2k-1} = \overline{\varphi_{2k}}$ par $\mathrm{Re}(\varphi_{2k})$ et par $\mathrm{Im}\ (\varphi_{2k})$.
- pour tout $k > 2p$, on conserve les fonctions φ_k car elles sont à valeurs réelles (en tout cas, on peut s'y ramener, éventuellement en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire de φ_k).

▷ Indications pour la résolution quand A est trigonalisable

Soit A une matrice trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (donc avec polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{K}$).

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

Soit P une matrice de passage vers une réduite triangulaire T.

La diagonale de T porte donc les valeurs propres successives $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et on a $T = P^{-1}AP$.

On effectue le changement de fonction inconnue défini par $X(t) = PY(t)$.

Le système (H) devient alors :

$$(H_Y) : Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = T\,Y(t)$$

La dernière ligne (L_n) de (H_Y) est $y_n'(t) = \lambda_n\, y_n(t)$.

La solution générale de (L_n) s'écrit $y_n(t) = \alpha_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t}$, avec α_n dans $\mathbb{K}$.

On reporte cette expression dans (L_{n-1}) et on trouve la solution générale de (L_{n-1}).

Progressivement, par reports successifs, on résout (H_Y) de la dernière équation à la première.

On obtient enfin la solution générale de (H) en revenant à $X = PY$.

On remarque que le calcul de P^{-1} n'est pas utile pour résoudre le système (H).

Exercice 13.4 (⇝ **corrigé**)
Résoudre le système différentiel :
$(x' = -3x + 5y - 5z\ ;\ y' = -4x + 6y - 5z\ ;\ z' = -4x + 4y - 3z)$.

Exercice 13.5 (⇝ **corrigé**)
Soit l'équation $(E) :\ x'''(t) - 5x''(t) + 7x'(t) - 3x(t) = 0$.

1. On pose $X(t) = \big(x(t), x'(t), x''(t)\big)^\top$. Montrer que (E) équivaut à un système différentiel $X' = AX$.

2. Trigonaliser A, puis résoudre (E).

Exercice 13.6 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

On considère l'équation différentielle (E) : $A'(t) = A(t)B - BA(t)$ où $A(t) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $A(0) = A_0$.

On se propose de montrer que les valeurs propres de $A(t)$ solution de (E) sont constantes.

On admet l'existence de $U(t) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{t^n}{n!}B^n$, notée $U(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}B^n$. Il est clair que $U(0) = I_d$.

On admet également que $t \mapsto U(t)$ est $\mathcal{C}^1$ et que : $\forall\,(t,s) \in \mathbb{R}^2,\ U(t)U(s) = U(t+s)$.

1. Montrer que (E) a une unique solution $t \mapsto A(t)$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est symétrique.
2. Montrer que la matrice $U(t)$ est orthogonale, pour tout réel t.
3. Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ A(t) = U(t)A_0\,U(t)^\top$. Conclure.

Exercice 13.7 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

Soit (S) : $\begin{cases} x'(t) = y(t) - z(t) \\ y'(t) = z(t) - x(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$, avec $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$.

1. Discuter l'existence et l'unicité de la solution $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
2. Montrer que la trajectoire est incluse dans une sphère et un plan.
3. Reconnaître l'intersection de cette sphère et de ce plan.
4. Résoudre directement (S) et retrouver le résultat de 3).

13.2 Équations différentielles linéaires scalaires

13.2.1 Équations différentielles $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$

Définition 13.2.1 (équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus)
Soit a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit qu'une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ est *solution* de (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$, si :
– la fonction $t \mapsto y(t)$ est deux fois dérivable sur I.
– sur tout l'intervalle I, on a l'égalité $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

Remarques

– on dit que (E) est une *équation différentielle scalaire d'ordre 2* ;
les fonctions a, b en sont les *coefficients*, et la fonction c en est le *second membre*.

– l'équation (H) : $y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0$ est appelée *équation homogène* associée à (S) ;
c'est le cas particulier correspondant à une fonction c identiquement nulle.

– quand on dit « solution de (E) », c'est pour dire « solution sur l'intervalle I tout entier ».

– toute solution de (E) ou de (H) est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

▷ **Écriture sous la forme d'un système différentiel** $X' = A(t)X + B(t)$

On reprend les notations précédentes, notamment les équations $\begin{cases} (E) : \ y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t) \\ (H) : \ y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0 \end{cases}$

Soit $t \mapsto y(t)$, deux fois dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On lui associe la fonction $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

Alors $(E) \Leftrightarrow (S) : \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$ qui est du type $X' = A(t)X + B(t)$.

De même l'équation homogène (H) équivaut au système homogène $X' = A(t)X$.

Proposition 13.2.1 (forme de l'ensemble des solutions de (E))
Soit a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose qu'on connait une solution particulière *y_p de $(E) : \ y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t)$.*
Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable sur I.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
- *la fonction y est solution de l'équation complète (E)*
- *la fonction $y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée $(H) : \ y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0$.*

En d'autres termes, la solution générale de (E) s'écrit comme la somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (S). Si on connait une solution particulière de (S), tout revient donc à résoudre l'équation (H) (on verra plus loin comment).

Rappel des termes du programme : *la recherche d'une solution particulière de l'équation complète doit comporter des indications.*

Le résultat suivant affirme l'existence et l'unicité d'une solution de (E) si on impose des « conditions initiales » données.

Proposition 13.2.2 (théorème de Cauchy linéaire)
Soit a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit t_0 un élément de I. Soit y_0 et m deux éléments de $\mathbb{K}$.
L'équation $(E) : \ y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t)$ possède une unique solution telle que $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = m \end{cases}$

Trouver cette solution, c'est résoudre le *problème de Cauchy pour les conditions initiales* $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = m \end{cases}$

Rappelons que cette solution est définie sur l'intervalle I tout entier.

Proposition 13.2.3 (principe de superposition des solutions)
Soit a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que la fonction c s'écrit $c(t) = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k\, c_k(t)$, où les fonctions c_k sont continues de I.
On suppose que pour $1 \leqslant k \leqslant p$ on connait une solution y_k de $(E_k) : \ y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c_k(t)$.
Alors la fonction $y = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k\, y_k$ est une solution particulière de (E).

Proposition 13.2.4 (solutions complexes quand les coefficients sont réels)
Soit $a\colon I \to \mathbb{R}$, $b\colon I \to \mathbb{R}$ et $c\colon I \to \mathbb{C}$ trois fonctions continues sur l'intervalle I.
Soit $y\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction deux fois dérivable. Les conditions suivantes sont équivalentes :
- *la fonction y est solution de l'équation $y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t)$.*
- *la fonction $\overline{y}$ est solution de l'équation $y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = \overline{c}(t)$.*

Si ces conditions sont réalisées, alors :
- *la fonction $\mathrm{Re}(y)$ est solution de l'équation $y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = \mathrm{Re}(c(t))$.*
- *la fonction $\mathrm{Im}\,(y)$ est solution de l'équation $y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = \mathrm{Im}(c(t))$.*

Proposition 13.2.5 (dimension de l'espace des solutions de $(H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$)
Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène $(H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est un plan vectoriel.
Soit t_0 un élément de I. L'application $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur $\mathbb{K}^2$.

Exercice 13.8 (⇝ **corrigé**)
1. Soit $y \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ $\varphi \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in [a,b]$, $y(x) \leq c + \displaystyle\int_a^x \varphi(t)y(t)\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que, pour tout $x \in [a,b]$, $y(x) \leq c \exp\left(\displaystyle\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
2. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{+*})$, croissante. Montrer que toute solution f de $f'' + qf = 0$ est f est bornée.

Exercice 13.9 (⇝ **corrigé**)
On considère $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ où a, b sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. Calculer pour deux solutions f, g de (E) la quantité $W = fg' - f'g$.
2. On suppose a impaire et b paire.
   Montrer que la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ est paire.
   Montrer de même que la solution g de (E) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ est impaire.
   En déduire qu'il existe une base de l'espace des solutions de (E) formée d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
3. On suppose qu'il existe une base de l'espace des solutions de (E) constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Montrer que a est impaire et b paire.

▷ Exemples d'utilisation de développements en série entière

Exercice 13.10 (⇝ **corrigé**)
Déterminer les solutions développables en série entière de (E) : $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$.

Exercice 13.11 (⇝ **corrigé**)
Résoudre sur $I =]-1, 1[$ l'équation (E) : $4(1 - t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = 0$.

- Résoudre l'équation différentielle $t(1 - t)y' + (1 - 3t)y' - y = 0$.
- Résoudre l'équation différentielle $ty'' + 3y' - 4t^3y = 0$.

13.2.2 Équations homogènes à coefficients constants $y'' + ay' + by = 0$

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$. Soit $t \mapsto c(t)$ une fonction continue, de I dans $\mathbb{K}$.

On considère ici les équations différentielles $\begin{cases} (E): \ y'' + ay' + by = c(t) \\ (H): \ y'' + ay' + by = 0 \end{cases}$

Le système différentiel linéaire associé à (E) s'écrit (S) : $\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de la matrice de ce système est : $\chi_A = \det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + a\lambda + b$.

L'équation $(\mathcal{C})$: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (E) et de (H).

▷ **Résolution de** (H) **si** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$.

- Si $\Delta \neq 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2.
  Une base de solutions de (H) est formée des deux fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$.
- Si $\Delta = 0$: $(\mathcal{C})$ a une solution double λ.
  Une base de solutions de (H) est formée des deux fonctions : $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ et $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$.

▷ **Résolution de** (H) **si** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si $\Delta = 0$: voir ci-dessus.
- Si $\Delta > 0$: voir le cas $\Delta \neq 0$ ci-dessus.
- Si $\Delta < 0$: $(\mathcal{C})$ a deux solutions non réelles $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ (avec α dans $\mathbb{R}$ et β dans $\mathbb{R}^*$).
  Une base de solutions de (H) est formée des deux fonctions : $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

▷ **Une solution de** (E) **si le second membre est du type** $\mathrm{e}^{\omega t}P(t)$

Soit ω un élément de $\mathbb{K}$, et soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On considère l'équation (E) : $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{\omega t}P(t)$,

- Si ω n'est pas racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
  Dans ce cas, (E) a une unique solution $\mathrm{e}^{\omega t}\,Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
- Si ω est racine simple de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
  Dans ce cas, (E) a une unique solution $\mathrm{e}^{\omega t}\,tQ(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P.
- Si ω est racine double de l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$:
  Dans ce cas, (E) a une unique solution $\mathrm{e}^{\omega t}\,t^2Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P.

Remarque : par superposition des solutions, et en écrivant $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ à l'aide $\mathrm{e}^{\pm i\omega t}$, la discussion précédente englobe le cas où le second membre s'écrit sous la forme $A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)$, avec A et B deux polynômes à coefficients réels (et en particulier quand A et B sont des constantes, ce qui est le seul cas explicitement évoqué dans le programme).

Exercice 13.12 (⇝ **corrigé**)

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 13.13 ($\rightsquigarrow$ **corrigé**)

Soit y_n la solution de $(n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = 0$ telle que $y_n(0) = 0$ et $y_n'(0) = 1$.

1. Déterminer y_n et montrer que la suite de fonctions (y_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que, pour tout $x < 0$, on a : $0 \leq e^x - 1 - x \leq x^2/2$.
3. En déduire que la suite de fonctions (y_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.