Chapitre 5

Techniques d'analyse (intégration)

Sommaire

5.1 Calculs de primitives

5.1.1 Primitives d'une fonction numérique

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

Définition 5.1.1 (primitive sur un intervalle)
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I, on a : $F'(x) = f(x)$.

Proposition 5.1.1 (relation entre les primitives d'une même fonction)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, et soit F une primitive de f sur I.

Les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto G(x) = F(x) + \lambda$, avec λ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout a de I, et tout y_0 dans $\mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f telle que $G(a) = b$.

Remarques

- Les primitives de f sur I sont définies « à une constante additive près ».

  On note souvent $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \lambda$ pour désigner l'ensemble des primitives de f sur I.

  On dit alors communément que λ est la « constante d'intégration ».

  Par exemple $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + \lambda$ désigne l'ensemble des primitives de $x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

  Dans cette notation, x joue le rôle de « variable muette ». Le symbole choisi n'a pas d'importance dans la mesure où il ne crée pas d'ambiguité.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Soit F et G deux primitives de f sur I.

  Si on souhaite déterminer la constante λ telle que $G = F + \lambda$, il suffit de calculer $G(a) - F(a)$ en un point de I (ou de calculer la différence des limites de F et G en une extrémité de I).

- Le calcul de primitives s'effectue toujours **sur un intervalle**.

  Par exemple, parler des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ n'a aucun sens.

  Supposons par exemple que f soit définie sur la réunion $\mathcal{D} = I \cup J$ de deux intervalles disjoints.

  Supposons également que F et G soient dérivables sur $\mathcal{D}$ et que : $\forall x \in \mathcal{D},\ F'(x) = G'(x) = f(x)$.

  D'une part : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + \lambda$. D'autre part : $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in J,\ G(x) = F(x) + \mu$.

  Mais en aucun cas, on ne peut affirmer que les constantes λ et μ sont égales.

5.1.2 Primitives usuelles

Voici un mémento des primitives $x \mapsto F(x)$ d'une fonction numérique $x \mapsto f(x)$, dans les cas « usuels ». Les résultats qui figurent dans le tableau suivant doivent donc être connus « par cœur ».

$f(x)$	$F(x)$	sur	$f(x)$	$F(x)$	sur
$x^\alpha,\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^{-*},\ \mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$x \neq \pm 1$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$a^x\ (a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$\lvert x\rvert > 1$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$	$x \neq k\pi$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathrm{th}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\dfrac{1}{\tan\,(x)}$	$x \neq k\pi$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$	$-\dfrac{1}{\mathrm{th}\,(x)}$	$\mathbb{R}^{+*},\ \mathbb{R}^{-*}$

Remarque : si $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+\lambda$, alors $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+\lambda$.

Par exemple : $\displaystyle\int (ax+b)^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\lambda$ $\qquad$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+\lambda$

$$\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+\lambda \qquad \int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}+\lambda$$

5.1.3 Reconnaître la dérivée d'une composée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, et soit $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $\varphi(J) \subset I$.
Soit F une primitive de f sur I. Alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur J.
On peut donc écrire directement : $\displaystyle\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (F \circ \varphi)(x)+\lambda$
Voici trois situations classiques :

$$\int \varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\varphi(x)}+\lambda \qquad \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\varphi(x)\rvert+\lambda \qquad \int \varphi'(x)\,\varphi^r(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\varphi^{r+1}(x)}{r+1}+\lambda$$

5.1.4 Primitivation de $x \mapsto \dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$

Les deux résultats ci-dessous sont utiles à connaître :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \lambda \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \lambda$$

Plus généralement, soit la fonction numérique $f : x \mapsto \dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$, où p, q, a, b, c sont réels (et $a \neq 0$).

On veut calculer $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$, sur un intervalle I où le dénominateur de f ne s'annule pas.

La première idée est d'écrire : $f(x) = \dfrac{p}{2a}\left(\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\right) + \left(q - \dfrac{pb}{2a}\right)\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.

Cette décomposition permet d'utiliser $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + \lambda$.

Il reste donc à calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$.

Pour cela, on utilise la « forme canonique », et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Suivant le signe de Δ, on est donc ramené à l'une des trois situations suivantes :

– Si $\Delta > 0$: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^2-\beta^2} = \frac{1}{2\beta}\ln\left|\frac{x+\alpha-\beta}{x+\alpha+\beta}\right| + \lambda$

– Si $\Delta = 0$: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^2} = -\frac{1}{x+\alpha} + \lambda$

– Si $\Delta < 0$: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\arctan\frac{x+\alpha}{\beta} + \lambda$

5.2 Intégration sur un segment

5.2.1 Intégrale d'une fonction continue

Nous admettrons le résultat suivant :

Proposition 5.2.1
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, elle admet des primitives sur I.

Remarque : la réciproque de la propriété précédente est fausse (il existe des fonctions numériques qui admettent des primitives sur un intervalle I sans être continues en tout point de I) mais la question est relativement difficile et elle est hors-programme.

Définition 5.2.1 (intégrale d'une fonction continue sur un segment)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue. Soit a, b deux éléments de I.
On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la quantité $F(b) - F(a)$, où F est une primitive *quelconque* de f sur I.
Cette quantité est appelée *intégrale* de f sur le segment $[a, b]$ (ou « entre a et b »).

Remarques

– Si f vaut constamment λ sur I, alors on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(b-a)$.

– La quantité $F(b)-F(a)$, notée $\Big[F(x)\Big]_a^b$, ne dépend pas de la primitive F choisie pour f.

– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue. Soit a un élément de I.
Alors la fonction $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.
Le nom de la « variable d'intégration » (ici t) doit être différent de celui de variable (ici x) de F.

– Quand on calcule $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on dit qu'on « intègre » f sur le segment $[a,b]$.
Même si les deux notions sont très liées, on ne confondra pas la *primitivation* de f sur I (qui est l'art de chercher les primitives de f sur I, donc les fonctions dont la dérivée est f) avec l'*intégration* de f sur un segment $[a,b]$ de I (le résultat est dans ce cas un réel).

Proposition 5.2.2 (linéarité de l'intégrale)
Soit f et g deux fonctions continues sur I. Soit a et b deux éléments de I.
Pour tous réels α,β, on a : $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

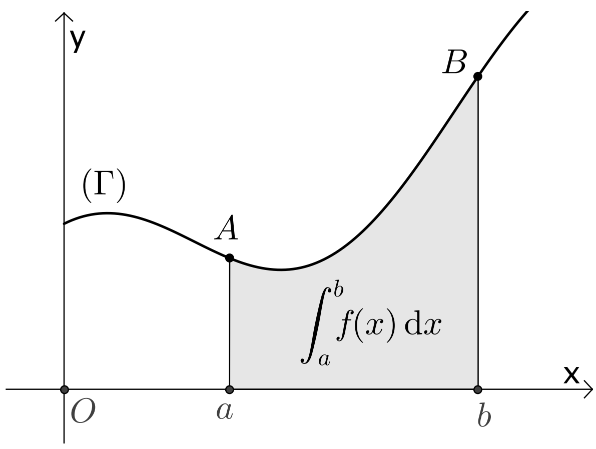
Proposition 5.2.3 (positivité et croissance de l'intégrale)
Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$, avec $a<b$.
Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ *(avec égalité $\Leftrightarrow$ $f(x)=0$ pour tout x de $[a,b]$).*
Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(avec égalité $\Leftrightarrow$ $f(x)=g(x)$ pour tout x de $[a,b]$).*

Remarque : l'hypothèse $a<b$ est ici essentielle.

Proposition 5.2.4 (relation de Chasles)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue. Soit a,b,c dans I. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interprétation de l'intégrale, en termes d'aire

Historiquement, la notion d'intégrale est liée au calcul d'aire de domaines du plan.
Notre définition de l'intégrale possède l'avantange d'être rapidement opérationnelle, mais elle recèle une difficulté qui ne peut pas être levée à ce stade de l'année.



Contentons-nous d'admettre, sans plus de précision, que si f est continue et positive ou nulle sur $[a,b]$, avec $a \leqslant b$, alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ est une mesure de l'aire du domaine défini par $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

L'aire est exprimée en « unités d'aires », l'unité étant l'aire du rectangle délimité par $(0,0)$ et $(1,1)$.

On peut étendre cette interprétation au cas d'une fonction ne gardant pas un signe constant, à condition de « compter positivement » les parties où $f \geqslant 0$ et négativement celles où $f \geqslant 0$.

5.2.2 Intégration et fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Pour tout ce qui touche à l'intégration, il est souvent utile de disposer de propriétés un peu plus fortes que la continuité ou même la dérivabilité, ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 5.2.2 (fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Bien sûr, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, l'intégrale de f' sur $[a, b]$ est la différence des valeurs de f entre a et b :

Proposition 5.2.5 (intégrale de la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tous a et b dans I, on a : $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$

Si f est continue sur I, et si $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on sait que $F'(x) = f(x)$ pour tout x.
On exprime la définition de F en disant qu'elle est une « intégrale fonction de sa borne supérieure ».
La résultat suivant apporte une généralisation aux « intégrales fonctions de leurs bornes » :

Proposition 5.2.6 (intégrale fonction de ses bornes)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de J dans $\mathbb{R}$, telles ques $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.
La fonction G, définie sur J par $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
Sa dérivée est donnée par : $\forall\, x \in J,\ G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Si l'intégrale cherchée ne peut pas être obtenue immédiatement par utilisation d'une primitive usuelle, on cherche souvent à transformer l'intégrale initiale en une ou plusieurs autres que l'on sait calculer.

5.2.3 Intégration par parties

Proposition 5.2.7 (intégration par parties)
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
Pour tous a, b dans l'intervalle I, on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$

Il y a aussi une méthode de « primitivation par parties » :
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemples d'intégrations par parties

– Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et pour tout m de $\mathbb{N}$, on pose $I_{n,m} = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^m(x)\,\mathrm{d}x$.

  Si $m \geqslant 1$, on a : $I_{n,m} = \displaystyle\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln^m(x)\right]_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{m-1}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{m}{n+1}\, I_{n,m-1}$.

  Une récurrence facile donne alors : $I_{n,m} = \dfrac{(-1)^m\, m!}{(n+1)^m}\, I_{n,0} = \dfrac{(-1)^m\, m!}{(n+1)^m}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{(-1)^m\, m!}{(n+1)^{m+1}}$.

– On peut calculer une primitive de $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ en primitivant par partie $\dfrac{1}{1+x^2}$.

En effet : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

On en déduit : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{1+x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x)\Big) + \lambda$

– Soit (α,β) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $C_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$ et $S_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x$

On trouve : $\alpha\, C_{\alpha,\beta} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + \beta \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + \beta\, S_{\alpha,\beta}$.

De la même manière : $\alpha\, S_{\alpha,\beta} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta\, C_{\alpha,\beta}$

En combinant ces deux égalités : $\begin{cases} \alpha^2\, C_{\alpha,\beta} = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + \beta\Big(\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta\, C_{\alpha,\beta}\Big) \\ \alpha^2\, S_{\alpha,\beta} = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta\Big(\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + \beta\, S_{\alpha,\beta}\Big) \end{cases}$

Et finalement : $\begin{cases} C_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)) + \lambda \\ S_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)) + \lambda \end{cases}$

5.2.4 Changement de variable

Proposition 5.2.8 (changement de variable dans une intégrale)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit $\varphi : J \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, telle que $\varphi(J) \subset I$.
Alors, pour tous a, b de J, on a $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$, *où* $c = \varphi(a)$, *et* $d = \varphi(b)$

Pratique du changement de variable :

Cette égalité peut être utilisée dans un sens ou dans l'autre selon les cas :

– Dans le sens $\displaystyle\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

On veut calculer $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, et on constate que $g(t)$ se met sous la forme $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

On pose alors $x = \varphi(t)$, et on note que lorsque $t = a$ ou $t = b$, alors $x = c$ ou $x = d$.

On écrit $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

– Dans le sens $\displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$.

On part donc de $\displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ et on pose (indication, intuition, expérience, etc.) $x = \varphi(t)$.

Dans ce cas, il faut trouver a et b tels que $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$.

Il est préférable de choisir φ et l'intervalle sur lequel cette fonction est définie de manière à ce que φ soit bijective : on a alors $a = \varphi^{-1}(c)$ et $b = \varphi^{-1}(d)$.

Par exemple, pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, on pose $x=\varphi(t)=\sin t$, avec $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a alors $\sqrt{1-x^2}=|\cos(t)|=\cos(t)$, et $\mathrm{d}x=\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

D'autre part, quand $x=0$ alors $t=0$, et quand $x=1$ alors $t=\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

Remarque : il y a un moyen encore plus simple de calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (lequel ?)

5.2.5 Utilisation de la parité ou de la périodicité

Quelques changements de variables très simples permettent d'exploiter la parité, ou l'imparité, ou la périodicité, de la fonction à intégrer.

– Une simple translation permet d'écrire : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(x-\alpha)\,\mathrm{d}x$.

– Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ (pas la peine de perdre du temps à calculer l'intégrale !)

– On suppose maintenant que f est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

On a $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, et plus généralement $\displaystyle\int_{a+kT}^{b+kT} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout k de $\mathbb{Z}$.

Pour tous réels a et b, on a l'égalité $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

5.3 Compléments sur les primitives

Le calcul d'une intégrale se ramène souvent au calcul d'une primitive.

Dans ce paragraphe, on va passer en revue quelques situations courantes. Les méthodes décrites ici doivent être considérées comme des « compléments utiles » du cours.

On note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+\lambda$ l'ensemble des primitives d'une application f.

5.3.1 Primitives de $\sin^p(x)\cos^q(x)$

Si on veut calculer $\displaystyle\int \sin^p(x)\cos^q(x)\,\mathrm{d}x$, avec p et q dans $\mathbb{N}$, tout dépend de la parité de p et q.

– Si p est impair, on peut poser $t=\cos(x)$ (donc $\mathrm{d}t=-\sin(x)\,\mathrm{d}x$) :

$$\int \sin^3(x)\cos^4(x)\,\mathrm{d}x=\int (t^2-1)\,t^4\,\mathrm{d}t=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\lambda=\frac{\cos^7(x)}{7}-\frac{\cos^5(x)}{5}+\lambda$$

– Si q est impair, on peut poser $t=\sin(x)$ (donc $\mathrm{d}t=\cos(x)\,\mathrm{d}x$) :

$$\int \cos^5(x)\,\mathrm{d}x=\int (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t=t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\lambda=\sin(x)-\frac{2\sin^3(x)}{3}+\frac{\sin^5(x)}{5}+\lambda$$

– Si p et q sont pairs, on linéarise :

$$\cos^4(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int(\cos(4x)+4\cos(2x)+3)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin(4x)}{32}+\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{3x}{8}+\lambda$$

5.3.2 Primitives de $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ (et associées)

On veut calculer $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$, où P est un polynôme et a un scalaire.

On peut procéder par intégrations par parties successives, si $\deg P$ n'est pas trop grand.

Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive de $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ sous la forme $Q(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, avec $\deg Q = \deg P$.

Par exemple, on écrira $\displaystyle\int(x^3-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = Q(x)\,\mathrm{e}^{-x}+\lambda$, avec $Q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

Par dérivation et identification, on obtient :

$$\begin{aligned}(Q(x)\,\mathrm{e}^{-x})' &= (Q'(x)-Q(x))\,\mathrm{e}^{-x} = (-\alpha x^3+(3\alpha-\beta)x^2+(2\beta-\gamma)^x+\gamma-\delta)\,\mathrm{e}^{-x}\\ &= (x^3-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\quad \text{donc } \alpha=-1,\ \beta=-3,\ \gamma=-4 \text{ et } \delta=-5.\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int(x^3-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -(x^3+3x^2+4x+5)\,\mathrm{e}^{-x}+\lambda$.

Primitives de $P(x)\sin(ax)$, ou $P(x)\cos(ax)$, ou $P(x)\,\mathrm{sh}(ax)$ ou $P(x)\,\mathrm{ch}(ax)$.

On est ramené au cas précédent en utilisant les formules d'Euler (quitte à aller vers des fonctions à valeurs complexes : ce sujet est traité un peu plus loin dans ce chapitre).

– On veut par exemple calculer $I=\displaystyle\int(x^3-2x+1)\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x$. On écrit $\mathrm{ch}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
  On obtient : $I=\dfrac{J+K}{2}$, avec $J=\displaystyle\int(x^3-2x+1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$ et $K=\displaystyle\int(x^3-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
  On sait déjà que $J=-(x^3+3x^2+4x+5)\,\mathrm{e}^{-x}+\lambda$ (voir exemple précédent).
  Une méthode analogue donne $K=(x^3-3x^2+4x-3)\mathrm{e}^x+\lambda$.
  On en déduit : $I=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\,(x^3-3x^2+4x-3)-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\,(x^3+3x^2+4x+5)+\lambda$.
  Dans le résultat, on peut remplacer e^x par $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)$ et e^{-x} par $\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)$.
  Tout calcul fait, on trouve : $I=-(3x^2+4)\,\mathrm{ch}(x)+(x^3+4x+1)\,\mathrm{sh}(x)+\lambda$.

– Si on veut calculer par exemple $J=\displaystyle\int x^4\cos(x)\,\mathrm{d}x$, on écrit $J=\mathrm{Re}\Big(\displaystyle\int x^4\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x\Big)$.
  Par identification on obtient $\displaystyle\int x^4\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{ix}(ix^4-4x^3-12ix^2+24x+24i)+\lambda$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi : } J &= \int x^4\cos(x)\,\mathrm{d}x = x^4\sin(x)+4x^3\cos(x)-12x^2\sin(x)-24x\cos(x)+24\sin(x)+\lambda\\ &= (x^4-12x^2+24)\sin(x)+4(x^3-6x)\cos(x)+\lambda\end{aligned}$$

5.3.3 Utilisation de récurrences

Pour calculer $I_n=\displaystyle\int f_n(x)\,\mathrm{d}x$, avec n dans $\mathbb{N}$, on peut chercher une relation de récurrence.

Cela passe souvent par une intégration par parties.

– **Premier exemple** :
  On veut calculer de $I_n=\displaystyle\int\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$ ou $J_n=\displaystyle\int\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$ (« intégrales de Wallis »).
  On suppose $n\geqslant 2$ et on intègre par partie $\sin(x)\,\sin^{n-1}(x)$ en dérivant $\sin^{n-1}(x)$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\,\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^2(x)\,\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)\,\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int (1-\sin^2(x))\,\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)\,\sin^{n-1}(x) + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

On en déduit la relation : $I_n = \dfrac{1}{n}\Big(-\cos(x)\,\sin^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2}\Big)$

Connaissant $\begin{cases} I_0 = x + \lambda \\ I_1 = -\cos(x) + \lambda \end{cases}$, on peut donc trouver les I_n de proche en proche.

– **Deuxième exemple** : on veut calculer $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$.

Première méthode : on intègre par parties dans I_n, en primitivant 1 et en dérivant $\dfrac{1}{(a^2+x^2)^n}$:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \frac{(a^2+x^2)-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}) \Longrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1)I_n\right] \end{aligned}$$

Connaissant $I_1 = \dfrac{1}{a}\arctan\Big(\dfrac{x}{a}\Big) + \lambda$, on en déduit I_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Il y a une autre méthode pour calculer $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$ (et qu'on recommandera si $n \leqslant 3$).

On effectue le changement de variable $x = a\tan t$. Ainsi $\mathrm{d}x = a(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi : $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{a^{2n-1}(1+t^2)^{n-1}} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui ramène aux intégrales de Wallis.

5.3.4 Primitives des fractions rationnelles

On décompose la fraction rationnelle *en éléments simples*.

La théorie sera abordée plus tard (et en se limitant à des situations assez simples).

Le problème est la primitivation de $f(x) = \dfrac{\lambda x + \mu}{(x^2+bx+c)^n}$, où $b^2 - 4c < 0$.

On écrit $f(x) = \dfrac{\lambda(2x+b)}{2(x^2+bx+c)^n} + \dfrac{2\mu - \lambda b}{2(x^2+bx+c)^n}$.

La fonction $g(x) = \dfrac{2x+b}{2(x^2+bx+c)^n}$ s'intègre facilement car elle est du type $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Il reste à intégrer $h(x) = \dfrac{1}{(x^2+bx+c)^n}$. Or $x^2+bx+c = \Big(x+\dfrac{b}{2}\Big)^2 + \alpha^2$, avec $\alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}$.

Le changement de variable $x = t - \dfrac{b}{2}$ donne : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^n} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}$.

On est ainsi ramené à une intégrale qu'on sait calculer (exemple précédent).

– **Un exemple très simple** : on veut calculer $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+5)}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2+2x+5)} &= \frac{1}{5x} - \frac{x+2}{5(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5x} - \frac{2x+2}{10(x^2+2x+5)} - \frac{1}{5(x^2+2x+5)} \\ &= \frac{1}{5x} - \frac{2x+2}{10(x^2+2x+5)} - \frac{1}{5((x+1)^2+2^2)}\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{10}\arctan\frac{x+1}{2} + \lambda.$

– **Cas des fractions rationnelles impaires** :

Poser $t = x^2$ permet d'abaisser le degré pratiquement de moitié. Par exemple :

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{2t(t+1)^2} = \int \Big(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{2(t+1)}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \lambda \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \lambda\end{aligned}$$

Dans certains, cas, on peut abaisser le degré de manière plus spectaculaire.

Par exemple, avec le changement de variable $t = x^5$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^5+1)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{5t(t+1)^2} = \frac{1}{5}\ln|t| + \frac{1}{5(t+1)} - \frac{1}{5}\ln(t+1) + \lambda \\ &= \ln|x| + \frac{1}{5(x^5+1)} - \frac{1}{5}\ln(x^5+1) + \lambda\end{aligned}$$

5.3.5 Fractions trigonométriques

Règles de Bioche

Attention : les « règles de Bioche » sont des méthodes empiriques, hors-programme mais utiles.

On considère ici une expression $f(x)$ formée par sommes, produits, quotients et puissances entières de fonctions trigonométriques. Les règles de Bioche consistent à proposer un changement de variable quand l'expression $f(x)\,\mathrm{d}x$ (donc y compris $\mathrm{d}x$) est invariante dans une certaine transformation.

On est alors conduit à une fraction rationnelle (et on a des méthodes pour ça).

– On dit que $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ présente « *l'invariant du cosinus* » si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est inchangé dans $x \mapsto -x$.

Dans ce cas, on peut faire le changement de variable $t = \cos(x)$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \lambda = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right| + \lambda = \ln\left|\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\right| + \lambda$

– On dit que $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ présente « *l'invariant du sinus* » si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est inchangé dans $x \mapsto \pi - x$.

Dans ce cas, on peut faire le changement de variable $t = \sin(x)$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{2\cos(x)\,\mathrm{d}x}{3-\cos(2x)} = \int \frac{\cos(x)\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2(x)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(t) + \lambda = \arctan\sin(x) + \lambda.$

– On dit que $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ présente « *l'invariant de la tangente* » si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est inchangé dans $x \mapsto x+\pi$.

  Dans ce cas, on peut faire le changement de variable $t = \tan(x)$.

  Exemple : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)\cos(x)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + \lambda = \ln|\tan(x)| + \lambda.$

S'il n'y a pas d'invariant

On peut poser $t = \tan\Big(\dfrac{x}{2}\Big)$, qui ramène à une fraction rationnelle, mais dont le degré est doublé.

Les règles de Bioche sont donc prioritaires si elles sont applicables.

On rappelle que $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, et $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

D'autre part, $t = \tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\Big(1+\tan^2\Big(\dfrac{x}{2}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin(x)} = \int \left(\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\right) = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}} + \lambda$

Fractions trigonométriques en $\mathrm{sh}(x)$**,** $\mathrm{ch}(x)$ **ou** $\mathrm{th}\,(x)$

On peut s'inspirer des règles de Bioche : on imagine de remplacer les fonctions hyperboliques par les fonctions circulaires correspondantes, et s'il y a par exemple l'invariant du sinus alors on effectue le changement de variable $t = \mathrm{sh}(x)$ dans l'intégrale initiale.

On peut aussi poser $t = \mathrm{th}\,\dfrac{x}{2}$, ou $u = \mathrm{e}^x$ (doublement du degré).

Rappel : $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{u^2-1}{2u}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{u^2+1}{2u}$, $\mathrm{th}\,(x) = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$, et $\Big(u = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}\Big)$.

5.3.6 Primitives avec radicaux

– En présence de $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, on essaiera le changement de variable $y = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

  Exemple très simple : on veut calculer $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$.

  On pose $t = \sqrt{x+1}$, donc $x+1 = t^2$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

  On en déduit : $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t(t^2-1)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 - 2t + \lambda = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1} + \lambda.$

– En présence de $\sqrt{ax^2+bx+c}$, on met ax^2+bx+c sous forme canonique :

  Si ax^2+bx+c s'écrit $\alpha^2\Big((x+\lambda)^2+\mu^2\Big)$, on pose $x+\lambda = \mu\,\mathrm{sh}(t)$.

  Si ax^2+bx+c s'écrit $\alpha^2\Big((x+\lambda)^2-\mu^2\Big)$, on pose $x+\lambda = \pm\,\mu\,\mathrm{ch}(t)$.

  Si ax^2+bx+c s'écrit $\alpha^2\Big(\mu^2-(x+\lambda)^2\Big)$, on pose $x+\lambda = \mu\sin t$.

  On retiendra surtout que la présence de $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{1-x^2}$ ou $\sqrt{x^2-1}$ incite aux changements de variables définis respectivement par $x = \mathrm{sh}(t)$, $x = \sin(t)$ ou $x = \pm\,\mathrm{ch}(t)$.

Exemple : on veut calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x(2-x))^{3/2}}$.

On pose $y = \sqrt{x(2-x)}$ (mais attention ce n'est pas le changement de variable).

On obtient alors $y^2 = x(2-x) = 2x - x^2 = 1-(x-1)^2$.

On pose alors $x - 1 = \sin(t)$, avec t dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $y = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$.

On en déduit : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x(2-x))^{3/2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{y^3} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \tan t + \lambda = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + \lambda$.

5.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

5.4.1 Fonctions à valeurs complexes

Définition 5.4.1

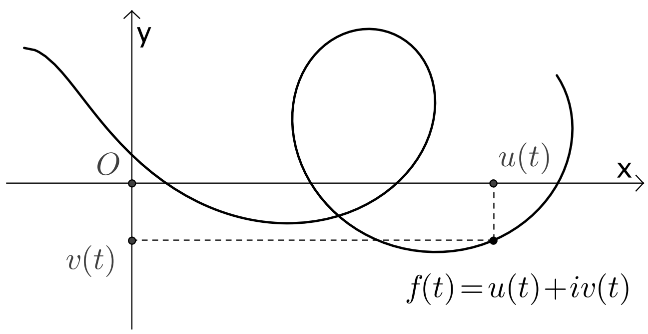
On note $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, à valeurs *complexes*.

Une telle fonction numérique *complexe* f est définie de façon unique par la donnée de deux fonctions numériques *réelles* u et v de la manière suivante : $\forall t \in \mathcal{D},\ f(t) = u(t) + i\,v(t)$

Il revient au même d'écrire : $\forall t \in \mathcal{D},\ u(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ et $v(t) = \mathrm{Im}\ (f(t))$.

On dit que u est la *partie réelle* de f, et v sa *partie imaginaire*. On note $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}\ (f)$.

Si on doit représenter graphiquement une telle fonction f, le mieux est d'imaginer un *arc paramétré* du plan, trajectoire du point $M(t)$ d'affixe $f(t) = u(t) + i\,v(t)$ quand le paramètre t parcourt l'intervalle I.



Si f, g sont dans $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$, et si α, β sont dans $\mathbb{C}$, on peut former les fonctions suivantes :

- La fonction $\alpha f + \beta g$ définie sur $\mathcal{D}$ par : $\forall t \in \mathcal{D},\ (\alpha f + \beta g)(t) = \alpha\, f(t) + \beta\, g(t)$
- La fonction $\overline{f}$ définie sur $\mathcal{D}$ par : $\forall t \in \mathcal{D},\ (\overline{f})(t) = \overline{f(t)}$
- La fonction fg définie sur $\mathcal{D}$ par : $\forall t \in \mathcal{D},\ (fg)(t) = f(t)g(t)$

5.4.2 Dérivée et intégrale des fonctions complexes

Définition 5.4.2 (continuité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$)

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Soit $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}\ (f)$.

On dit que f est continue sur I si et seulement si les fonctions u et v sont continues sur I.

Définition 5.4.3 (dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Soit $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}\ (f)$.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions u et v sont dérivables sur I.
On note alors $f' = u' + i\,v'$ et on dit que f' est la fonction dérivée première de f.

Définition 5.4.4 (intégrale sur un segment d'une fonction complexe)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Soit $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}\ (f)$.
Pour tous a, b de I, on pose : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\ +\ i\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$

Remarques

On retiendra de ce qui précède que, concernant les fonctions à valeurs complexes, tout revient à procéder (continuité, dérivées, intégrales) séparément sur la partie réelle et sur la partie imaginaire.

– On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est n fois dérivable si u, v sont n fois dérivables, et on écrit $f^{(n)} = u^{(n)} + i\,v^{(n)}$.
En d'autres termes, on peut écrire $\mathrm{Re}(f^{(n)}) = (\mathrm{Re} f)^{(n)}$ et $\mathrm{Im}\ (f^{(n)}) = (\mathrm{Im}\ f)^{(n)}$.
– On définit de façon évidente les primitives d'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$:
$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,\mathrm{d}x\ +\ i\int v(x)\,\mathrm{d}x$ (à une constante additive complexe λ quelconque).
– De même, par définition de l'intégrale de f, on a les égalités :
$$\mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{Im}\ \Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \int_a^b \mathrm{Im}\ \big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

5.4.3 Extension des résultats relatifs aux fonctions réelles

Des définitions précédentes, il découle que de nombreuses propriétés établies pour des fonctions à valeurs réelles s'étendent sans difficulté au cas des fonctions à valeurs complexes.

En revanche, et c'est important :
Tout ce qui a un rapport avec la relation d'ordre dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ n'a plus de sens pour une fonction f à valeurs complexes. On ne parlera donc **jamais** de la monotonie ou des extremums de f (ça n'existe pas).
De même, si f est continue sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'image $f(I)$ est un arc du plan complexe (mais certainement pas *un intervalle*). Le *signe* de $f : I \to \mathbb{C}$, ou le théorème des valeurs intermédiaires, ou le *théorème de la bijection réciproque* n'ont ici plus aucune signification.

Voici **ce qui reste vrai pour la dérivabilité**, dans le cas des fonctions à valeurs complexes :

– les égalités : $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ $\quad (fg)' = f'g + fg'$ $\quad \Big(\dfrac{1}{g}\Big)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ $\quad \Big(\dfrac{f}{g}\Big)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
– avec $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ et $f(I) \subset J$, on a encore $(g \circ f)' = f'\,(g' \circ f)$
– la fonction dérivable $f : I \to \mathbb{C}$ est constante si et seulement si f' est identiquement nulle.
la fonction $f - g$ est constante sur I si et seulement si on a $f' = g'$ sur I.

Voici **ce qui reste vrai pour l'intégration**, dans le cas des fonctions à valeurs complexes :
– l'égalité $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, où F est une primitive *quelconque* de f sur I.

– la linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles, l'intégration par parties.

En revanche, dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, il n'est évidemment plus question de positivité et de croissance de l'intégrale.

Un exemple à connaître, et à méditer !

Soit ω un nombre complexe *non réel.*
Considérons la fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-\omega}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et on se propose d'en calculer les primitives.

Une erreur (catastrophique) consiste à écrire $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega} = \ln|x-\omega| + \lambda$, ou $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega} = \ln(x-\omega) + \lambda$.

La deuxième expression n'a aucun sens car la fonction $t \mapsto \ln(t)$ n'est définie, pour nous, que sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En revanche (et avant de savoir ce qu'il convient réellement de faire), on peut s'interroger sur la première expression, car l'application $\varphi\colon x \mapsto \ln|x-\omega|$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Posons $\omega = a + ib$, avec (a, b) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Pour tout réel x, on a $\varphi(x) = \ln\sqrt{(x-a)^2 + b^2} = \dfrac{1}{2}\ln\Big((x-a)^2 + b^2\Big)$ donc $\varphi'(x) = \dfrac{x-a}{(x-a)^2 + b^2}$.
Mais $f(x) = \dfrac{1}{x-\omega} = \dfrac{x-\overline{\omega}}{|x-\omega|^2} = \dfrac{x-a+ib}{(x-a)^2+b^2}$, et on constate que $\varphi'(x)$ n'est *jamais* égal à $f(x)$.

Pour calculer correctement les primitives de f, voici la méthode :

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega} = \int \frac{x-\overline{\omega}}{|x-\omega|^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-a+ib}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x + ib\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln\Big((x-a)^2+b^2\Big) + i\arctan\frac{x-a}{b} + \lambda \quad (\text{avec } \lambda \text{ quelconque dans } \mathbb{C})\end{aligned}$$

Si on veut *vraiment* exprimer les primitives de f à l'aide de ω (plutôt que $a = \mathrm{Re}\omega$ et $b = \mathrm{Im}\,\omega$), et également si on a le goût du risque, on peut observer que le résultat précédent s'écrit :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega} = \ln|x-\omega| + i\arg(x-\omega) + \lambda \qquad \text{avec } \lambda \text{ quelconque dans } \mathbb{C}$$

(on choisit par exemple d'utiliser la détermination principale de l'argument)

Si pour z dans $\mathbb{C}^*$ on note $\psi(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, on sait que $\exp(\psi(z)) = z$.

En conclusion, l'évocation prématurée du logarithme dans le calcul de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega}$ reste une erreur flagrante, mais on a tout de même $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega} = \psi(x-\omega) + \lambda$, avec $\exp(\psi(x-\omega)) = x-\omega$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

5.4.4 Cas de la fonction exponentielle complexe

Proposition 5.4.1
Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Soit $f = \exp(\varphi)$, définie sur I par $f(x) = \exp(\varphi(x))$.

Alors f est dérivable sur I et, pour tout x de I : $f'(x) = \varphi'(x)\exp(\varphi(x))$.

Applications

– Un cas particulier du résultat précédent est : si $f(x) = \mathrm{e}^{\omega x}$, alors $f'(x) = \omega \mathrm{e}^{\omega x}$.

– Si ω est dans $\mathbb{C}^*$, on peut écrire : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{\omega x} + \lambda$ (avec λ quelconque dans $\mathbb{C}$).

– On va utiliser cette idée pour reprendre un exemple déjà vu.

Soit (α, β) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $C_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$ et $S_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x$

On introduit $\omega = \alpha + i\beta$, puis $Z_{\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta} + iS_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\omega x}\,\mathrm{d}x$

On trouve : $Z_{\alpha,\beta} = \dfrac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{\omega x} + \lambda = \dfrac{\overline{\omega}}{|\omega|^2}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} + \lambda = \dfrac{\alpha - i\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + \lambda$.

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on retrouve (avec λ quelconque dans $\mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} C_{\alpha,\beta} = \mathrm{Re}(Z_{\alpha,\beta}) = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)) + \lambda \\ S_{\alpha,\beta} = \mathrm{Im}\ (Z_{\alpha,\beta}) = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)) + \lambda \end{cases}$$

5.5 Équations différentielles $y' + a(x)y = b(x)$

Dans cette section, il sera question de fonctions à valeurs réelles ou complexes.
Ces fonctions seront définies sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$.
On notera $\mathbb{K}$ pour désigner indifféremment $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, et on parlera de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

5.5.1 Position du problème

Définition 5.5.1
Soit I un intervalle ouvert non vide.
Soit $x \mapsto a(x)$ et $x \mapsto b(x)$ deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ est une *équation différentielle linéaire du premier ordre.*
On note (H) l'équation différentielle : $y' + a(x)y = 0$.
On dit que (H) est l'*équation différentielle homogène* associée à (E).

Compléments sur la définition

Résoudre (on dit aussi « intégrer ») l'équation (E) (resp. l'équation (H)) c'est trouver toutes les fonctions dérivables $y : I \to \mathbb{K}$ qui vérifient l'égalité (E) (resp. l'égalité (H)) sur I.

On pourra noter $\mathcal{S}_E$ (resp. $\mathcal{S}_H$) l'ensemble des solutions de (E) (resp. de (H)) sur I.

À la fois pour (E) et pour (H), la « solution générale » désigne une expression (en fonction d'une constante d'intégration, comme on le verra) de toutes les « solutions particulières ».

Cas particulier où a est une constante

Proposition 5.5.1 (solution générale de $y' + ay = 0$, où a est une constante)
On considère l'équation homogène (H) : $y' + a\,y = 0$ où a est un élément de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ est donnée par $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$, où λ est quelconque dans $\mathbb{K}$.

Remarque importante sur l'intervalle de résolution

Les résultats de cette section peuvent être étendus aux équations différentielles qui se présentent sous la forme $u(x)y'(x) + v(x)y(x) = w(x)$, où u, v, w sont des fonctions numériques continues.

Mais il faut alors obligatoirement se placer sur un intervalle sur lequel la fonction $x \mapsto u(x)$ ne s'annule pas (de manière à revenir, en divisant par $u(x)$, à la forme précédente, dite « normalisée »).

Par exemple, pour résoudre $x(1-x)y'(x) + v(x)y(x) = w(x)$, il faudra absolument commencer par dire qu'on se place sur l'intervalle $I =]-\infty, 0\,[$, ou $I =]\,0, 1\,[$, ou $I =]\,1, +\infty\,[$.

5.5.2 Résolution de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$

Proposition 5.5.2 (solution générale de (H) : $y' + a(x)y = 0$)
On considère l'équation (H) : $y' + a(x)y = 0$, sur l'intervalle I.
Soit A une primitive particulière *de $x \mapsto b(x)$ sur I.*
La solution générale de (H) sur I s'écrit $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$, où λ est quelconque dans $\mathbb{K}$.

Remarques et exemples

Le résultat précédent montre que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions y de (H) sur I est égal à l'ensemble des multiples d'une solution particulière y_0 non nulle de (H) sur I. On exprime cette situation en disant que $\mathcal{S}_H$ est une *droite vectorielle*. On voit d'ailleurs qu'une solution de (H) sur I, si elle n'est pas la solution nulle, ne s'annule jamais sur I.

Si on « devine » une solution non nulle de (H) sur I, alors on connait la solution générale (sans avoir à passer par la formule précédente).
Par exemple, on constate que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution de (H) : $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Sur $I = \mathbb{R}^{-*}$ ou sur $I = \mathbb{R}^{-*}$, la solution générale de (H) est donc l'ensemble des $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$, $(\lambda \in \mathbb{K})$.

5.5.3 Résolution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$

Proposition 5.5.3 (solution générale de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$)
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + a(x)y = b(x)$, sur un intervalle I.
La solution générale de (E) sur I est donnée par $y_\lambda(x) = (B(x) + \lambda)\mathrm{e}^{-A(x)}$, où :
- *la fonction $x \mapsto A(x)$ est une primitive particulière de $x \mapsto a(x)$ sur I*
- *le scalaire λ est quelconque dans $\mathbb{K}$.*
- *la fonction $x \mapsto B(x)$ est une primitive particulière de $x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$ sur I*

Proposition 5.5.4 (structure de l'ensemble des solutions de (E))
On considère les équations (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ et (H) : $y' + a(x)y = 0$.

La solution générale de (E) est la somme de celle de (H) et d'une solution particulière de (E).

Deux exemples

– Considérons par exemple l'équation différentielle $(E): \; xy' + y = 2x$.
  À cause du coefficient de y', il faut obligatoirement se placer sur $I = \mathbb{R}^{-*}$ ou $I = \mathbb{R}^{+*}$.
  On « remarque » qu'une solution particulière de $(E): \; xy' + y = 2x$ est la fonction $x \mapsto x$.
  On sait que la solution générale de (H) sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ s'écrit $y(x) = \dfrac{\lambda}{x}$, avec λ dans $\mathbb{K}$.
  La solution générale de (E) sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ est donc $y(x) = x + \dfrac{\lambda}{x}$, avec λ dans $\mathbb{K}$.

– Considérons l'équation différentielle $(E): \; \cos(x)\, y' + \sin(x)\, y = 1$, sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
  On « remarque » qu'une solution particulière de (E) sur I est $x \mapsto \sin(x)$.
  On « remarque » qu'une solution particulière (non nulle) de (H) sur I est $x \mapsto \cos(x)$.
  La solution générale de (E) sur I s'écrit donc $y(x) = \sin(x) + \lambda \cos(x)$, avec λ dans $\mathbb{K}$.

5.5.4 Principe de superposition

Proposition 5.5.5
On considère l'équation différentielle $(E): \; y' + a(x)y = b(x)$, sur un intervalle I.
On suppose que la fonction $x \mapsto b(x)$ s'écrit $b(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, b_k(x)$ (les α_k étant des scalaires).
Soit $x \mapsto y_k(x)$ une solution particulière sur I de l'équation différentielle $(E_k): \; y' + a(x)y = b_k(x)$.
Alors une solution particulière sur I de (E) est : $x \mapsto y(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, y_k(x)$

Remarques et exemples

– Considérons par exemple l'équation différentielle $(E): \; xy' + y = 2x + 1 + \ln(x)$, sur $I = \mathbb{R}^{+*}$.
  Une solution particulière de $(E_1): \; xy' + y = 2x$ sur I est $x \mapsto x$.
  Une solution particulière de $(E_2): \; xy' + y = 1 + \ln(x)$ sur I est $x \mapsto \ln(x)$.
  Une solution particulière de (E) sur I est donc $x \mapsto x + \ln(x)$.

– Soit $a : I \to \mathbb{R}$ (donc à valeurs *réelles*) et $b : I \to \mathbb{C}$ (donc à valeurs *complexes*), continues sur I.
  Soit $x \mapsto \omega(x)$ une solution particulière de $(E): \; y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
  Alors $x \mapsto \mathrm{Re}(\omega(x))$ est solution particulière sur I de l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = \mathrm{Re}(b(x))$.
  De même, $x \mapsto \mathrm{Im}\,(\omega(x))$ est solution particulière sur I de l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = \mathrm{Im}\,(b(x))$.
  Cette idée sert quand $b(x) = P(x)\cos(\beta x)$, ou $P(x)\sin(\beta x)$ (P un polynôme à coefficients réels).
  Les calculs sont en effet plus simples en écrivant le second membre sous la forme $P(x)\mathrm{e}^{i\beta x}$.
  Il suffit alors de prendre la partie réelle (ou imaginaire) de la solution particulière obtenue.

5.5.5 Méthode de variation de la constante

On considère les équations (H) : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ et (E) : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
On rappelle que les fonctions a et b sont continues, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $x \mapsto h(x)$ une solution de (H) sur I, non nulle (donc ne s'annulant pas sur I).
On sait que la solution générale de (H) sur I s'écrit $y : x \mapsto \lambda h(x)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pour résoudre complètement (E) sur I, il suffit d'en connaître une solution particulière.
On cherche une telle solution sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)\, h(x)$, où λ est maintenant une fonction dérivable sur I à valeurs dans K (on fait donc « varier la constante »).

Avec ces notations, et pour tout x de l'intervalle I :

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) &\Leftrightarrow \lambda'(x)h(x) + \lambda(x)h'(x) + a(x)\lambda(x)h(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)h(x) + \lambda(x)\big(h'(x) + a(x)h(x)\big) = b(x) \Leftrightarrow \lambda'(x)h(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{b(x)}{h(x)} \qquad \text{(ce qui détermine la fonction } x \mapsto \lambda(x) \text{ à une constante } \mu \text{ près)} \end{aligned}$$

Si Γ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{b(x)}{h(x)}$ sur I, on a ainsi obtenu $x \mapsto y(x) = \Gamma(x)h(x) + \mu h(x)$, avec $\mu \in \mathbb{K}$.

Cette méthode donne donc l'ensemble des solutions de (E) sur I.

Remarque importante : il n'est pas nécessaire de calculer explicitement $h'(x)$ quand on applique la méthode, car cette dérivée se simplifie toujours !

5.5.6 Problème de Cauchy

Proposition 5.5.6 (existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy)
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + b(x)y = c(x)$, *sur l'intervalle* I.
Soit x_0 *un point* I, *et soit* y_0 *un élément quelconque de* $\mathbb{K}$.
Il existe une unique solution de (E) *sur* I *satisfaisant à la* condition initiale $y(x_0) = y_0$.
Trouver cette solution, c'est résoudre le problème de Cauchy *relatif à ces conditions initiales.*

Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (toutes les fonctions sont donc à valeurs réelles).
Les courbes représentatives des solutions de (E) sont appelées *courbes intégrales* de (E).

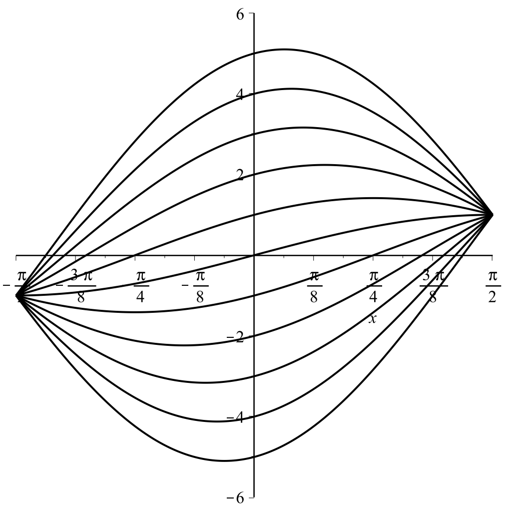
Ce que dit le résultat précédent, c'est que par tout point $M(x_0, y_0)$ de $I \times \mathbb{R}$, il passe une et une seule courbe intégrale de (E).

Bien sûr cela n'est valable que sur l'intervalle ouvert sur lequel on résout l'équation (E), et cesse d'être vrai aux extrémités de cet intervalle.

On voit ici quelques solutions de l'équation :
(E) : $\cos(x)\, y' + \sin(x)\, y = 1$, sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

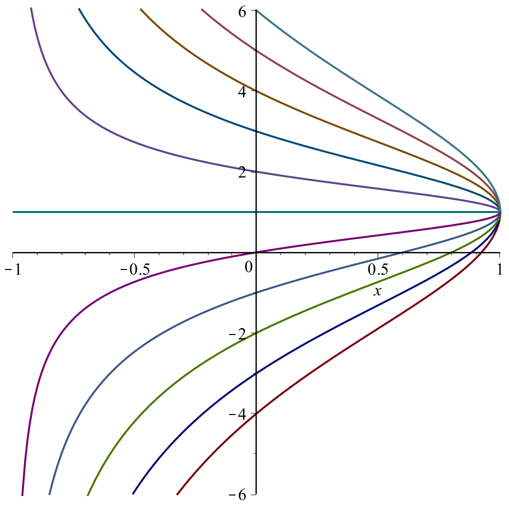
Ce sont les $y(x) = \sin(x) + \lambda \cos(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Sur cet exemple, on voit que les solutions se prolongent par continuité de la même manière aux extrémités de I.



$\cos(x)\, y' + \sin(x)\, y = 1$
solutions : $y(x) = \sin(x) + \lambda \cos(x)$

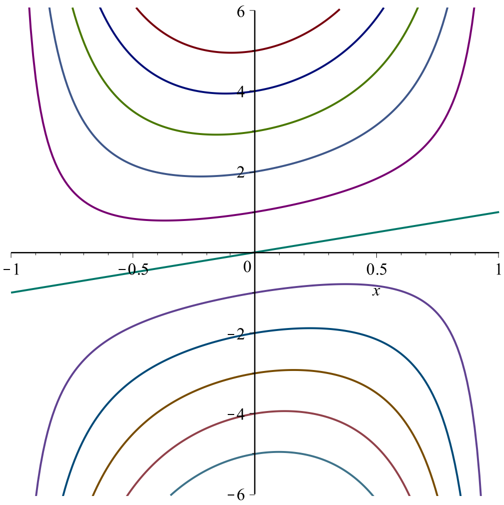
Voici deux autres exemples, avec des comportements différents aux bornes de I (ici $I =]-1,1[$)



$$(1-x^2)y' + y = 1$$

solution générale $y(x) = 1 + \lambda\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

solution particulière $y(x) = 1$



$$(1-x^2)y' - 2xy = 1 - 3x^2$$

solution générale $y(x) = x + \dfrac{\lambda}{1-x^2}$

solution particulière $y(x) = x$

On retiendra que les « courbes intégrales » d'une équation différentielle (E) : $y'(x) + a(x) = b(x)$ ne se « croisent » jamais sur l'intervalle ouvert I où on résout l'équation. L'ensemble de ces courbes constitue donc une partition de la bande verticale délimitée par l'intervalle I (on suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

5.6 Équations différentielles du 2nd ordre

Dans cette section, il sera question de fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Ces fonctions seront définies sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$.

On notera $\mathbb{K}$ pour désigner indifféremment $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, et on parlera de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

5.6.1 Position du problème

Définition 5.6.1

Soit I un intervalle ouvert non vide. Soit a, b deux éléments de $\mathbb{K}$.

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction continue sur I, à valeurs *réelles ou complexes*.

On considère l'équation (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$.

On dit que (E) est une *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*.

On note (H) l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$.

On dit que (H) est l'*équation différentielle homogène* associée à (E).

Compléments sur la définition

Résoudre (ou « intégrer ») l'équation (E) (resp. (H)) c'est trouver toutes les fonctions deux fois dérivables $y : I \to \mathbb{K}$ (resp. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$) qui vérifient l'égalité (E) sur I (resp. (H) sur $\mathbb{R}$).

On pourra noter $\mathcal{S}_E$ (resp. $\mathcal{S}_H$) l'ensemble des solutions de (E) de I (resp. de (H) sur $\mathbb{R}$).

À la fois pour (E) et pour (H), la « solution générale » désigne une expression (en fonction de deux constantes d'intégration, comme on le verra) de toutes les « solutions particulières ».

5.6.2 Résolution de l'équation homogène

Proposition 5.6.1 (équation caractéristique)
Soit a, b dans $\mathbb{K}$, et soit (H) l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$.
*On dit que (C) : $r^2 + ar + b = 0$ est l'*équation caractéristique *de (H).*
L'application $y : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ est solution de (H) sur $\mathbb{R}$ et si seulement si r est solution de (C).

Proposition 5.6.2 (solution générale de (H) dans le cas complexe)
Soit a, b dans $\mathbb{C}$, et soit (H) l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$.
Soit $\Delta = a^2 - 4b$, le discriminant de l'équation caractéristique (C) : $r^2 + ar + b = 0$
- *Si $\Delta \neq 0$, l'équation (C) possède deux solutions complexes distinctes r et s.*
  La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit alors : $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{rx} + \mu\,\mathrm{e}^{sx}$, avec λ et μ dans $\mathbb{C}$.
- *Si $\Delta = 0$, l'équation (C) possède une solution double r dans $\mathbb{C}$.*
  La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit alors : $y(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$, avec λ et μ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 5.6.3 (solution générale de (H) dans le cas réel)
Soit a, b dans $\mathbb{R}$, et soit (H) l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$.
Soit $\Delta = a^2 - 4b$, le discriminant de l' équation caractéristique (C) : $r^2 + ar + b = 0$
- *Si $\Delta > 0$, l'équation (C) possède deux solutions réelles distinctes r et s.*
  La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{rx} + \mu\,\mathrm{e}^{sx}$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
- *Si $\Delta = 0$, l'équation (C) possède une solution double r dans $\mathbb{R}$.*
  La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{rx}$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
- *Si $\Delta < 0$, l'équation (C) possède deux solutions complexes conjuguées distinctes r et $\bar{r}$.*
  Posons $r = \alpha + i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
  La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.

Structure de l'ensemble des solutions de (H)

Dans tous les cas, la solution générale y de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit $x \mapsto y(x) = \lambda h(x) + \mu k(x)$, où $x \mapsto h(x)$ et $x \mapsto k(x)$ sont deux solutions particulières de (H) non nulles et non proportionnelles.

On exprime cette situation en disant que la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ est un *plan vectoriel*, dont une *base* est constituée des fonctions $x \mapsto h(x)$ et $x \mapsto k(x)$.

Deux cas particuliers importants

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit ω un réel strictement positif.
- La solution générale de $y'' + \omega^2 y = 0$ s'écrit $y(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
  Elle s'écrit aussi : $y(x) = A \cos\Big(\omega(x - x_0)\Big)$, avec A et x_0 dans $\mathbb{R}$.

– La solution générale de $y'' - \omega^2 y = 0$ s'écrit $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{\omega x} + \mu\,\mathrm{e}^{-\omega x}$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
  Elle s'écrit aussi $y(x) = \lambda\ \mathrm{ch}(\omega x) + \mu\ \mathrm{sh}(\omega x)$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.

5.6.3 Forme des solutions de l'équation complète

Proposition 5.6.4 (structure de la solution générale de (E))
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soit a, b deux éléments de $\mathbb{K}$.
L'équation (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$ possède des solutions sur $\mathbb{R}$. Soit $y_0 : I \to \mathbb{K}$ l'une d'elles.
Alors $y : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (H).
En d'autres termes, la solution générale de (E) sur I s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$.

Remarque importante

On sait que la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit $x \mapsto \lambda\, h(x) + \mu\, k(x)$, où h et k sont deux solutions particulières de (H) non nulles et non proportionnelles.

La solution générale de (E) sur I s'écrit donc $x \mapsto y(x) = y_0(x) + \lambda\, h(x) + \mu\, k(x)$. En particulier l'expression de cette solution générale fait toujours apparaître deux constantes λ et μ arbitraires.

Cas où on « devine » une solution particulière de (E)

On possède une « formule » pour la solution générale de (H), et tout le problème est de trouver une solution particulière de (E). Le cas le plus favorable est celui où on « devine » une telle solution.

Par exemple, une solution particulière de (E) : $y'' + y = 1$ est évidemment $y = 1$.

La solution générale de (E) est donc donnée par $y(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + 1$.

La proposition suivante est utile quand le second membre est combinaison linéaire de fonctions simples :

Proposition 5.6.5 (principe de superposition)
On considère l'équation (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$, où $f : I \to \mathbb{K}$ est continue.
On suppose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, f_k(x)$ (où les α_k sont scalaires, et les $f_k : I \to \mathbb{K}$ sont continues sur I).
Soit $x \mapsto y_k(x)$ une solution particulière sur I de l'équation (E_k) : $y'' + ay' + by = f_k(x)$.
Alors une solution particulière sur I de (E) est : $x \mapsto y(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, y_k(x)$.

5.6.4 Problème de Cauchy

Proposition 5.6.6 (Problème de Cauchy)
On considère l'équation (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$, où $f : I \to \mathbb{K}$ est continue.
Soit x_0 un élément de I, et (y_0, m) un élément quelconque de $\mathbb{K}^2$.
Alors il existe une unique solution de (E) sur I satisfaisant aux conditions initiales $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = m \end{cases}$
La trouver c'est résoudre le problème de Cauchy *relatif à ces conditions initiales.*

Interprétation graphique

Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (toutes les fonctions sont donc ici à valeurs réelles).

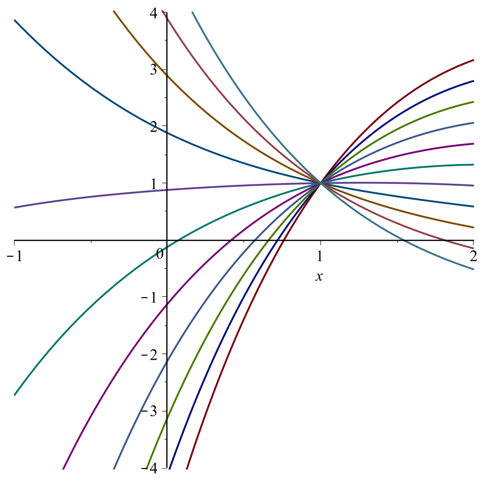
Par tout point $M(x_0, y_0)$, avec x_0 dans I et y_0 dans $\mathbb{R}$, il passe une courbe intégrale unique ayant une pente donnée m. Il faut donc « deux conditions » au même point x_0 (l'une portant sur la valeur de la solution, l'autre sur sa dérivée) pour s'assurer de l'unicité d'une solution.

Si on ne fixe qu'une des deux conditions (soit $y(x_0) = y_0$, soit $y'(x_0) = m$), il reste encore une infinité de solutions dont les représentations graphiques forment :

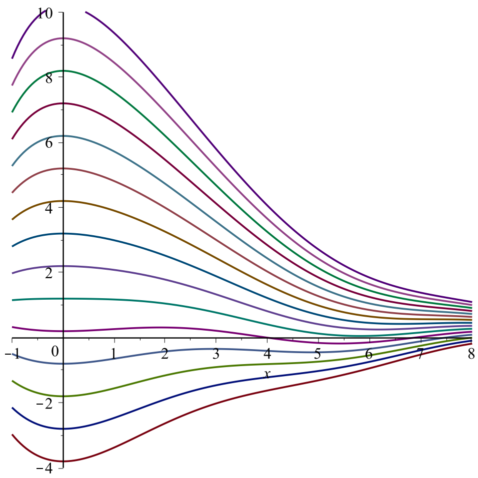
– dans le premier cas : un faisceau de courbes passant par $M(x_0, y_0)$,

– dans le second cas, un faisceau de courbes dont les tangentes au point d'abscisse x_0 sont parallèles.

Voici deux exemples, avec l'équation différentielle $4y'' + 4y' + y = \cos(x)$.



$4y'' + 4y' + y = \cos(x)$
avec la condition $y(1) = 1$



$4y'' + 4y' + y = \cos(x)$
avec la condition $y'(0) = 0$

5.6.5 Quelques exemples

Conjuguée d'une solution complexe

On considère (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$, avec a, b réels mais $f : I \to \mathbb{C}$ continue à valeurs *complexes*.

Soit $x \mapsto \varphi(x)$ une solution particulière de (E) sur l'intervalle I.

Alors l'application conjuguée $x \mapsto \overline{\varphi}(x)$ est une solution de $(\overline{E})$: $y'' + ay' + by = \overline{f}(x)$ sur I.

Par superposition des deux seconds membres $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \overline{f(x)}$, on en déduit que :

– la fonction $x \mapsto \mathrm{Re}(\varphi(x))$ est solution de $y'' + ay' + by = \mathrm{Re}(f(x)$ sur I.

– la fonction $x \mapsto \mathrm{Im}\ (\varphi(x))$ est solution de $y'' + ay' + by = \mathrm{Im}\ (f(x))$ sur I.

Par exemple, pour trouver une solution de l'équation $y'' + y' + 2y = x\cos(x)$, il suffit de trouver une solution φ de l'équation $y'' + y' + 2y = x\mathrm{e}^{ix}$ et d'en prendre la partie réelle.

Seconds membres particuliers

On considère l'équation (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$, avec a, b dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ continue.

Soit (C) : $r^2 + br + c = 0$ son équation caractéristique.

On suppose ici que $f(x) = P(x)\mathrm{e}^{mx}$, où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, et où m est dans $\mathbb{K}$.

Alors on peut chercher une solution particulière de (E) :

– sous la forme $y(x) = Q(x)\mathrm{e}^{mx}$, avec $\deg(Q) = \deg(P)$, si m n'est pas racine de (C).
– sous la forme $y(x) = xQ(x)\mathrm{e}^{mx}$, avec $\deg(Q) = \deg(P)$, si m est racine simple de (C).
– sous la forme $y(x) = x^2Q(x)\mathrm{e}^{mx}$, avec $\deg(Q) = \deg(P)$, si m est racine double de (C).

Une fois qu'on a compris sous quelle forme chercher cette solution particulière de l'équation (E), il suffit d'écrire le polynôme Q avec des coefficients indéterminés, d'injecter cette expression de $y(x)$ dans (E) et de procéder à une identification pour déterminer les coefficients de Q.

Si le second membre est de la forme $f(x) = P(x)\cos(\omega x) + Q(x)\sin(\omega x)$, on se ramène à ce qui précède en écrivant $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$ en fonction de $\mathrm{e}^{i\omega x}$ et en utilisant le principe de superposition. On peut également chercher une solution particulière sous la forme $f(x) = R(x)\cos(\omega x) + S(x)\sin(\omega x)$ (en attendant l'identification pour déterminer le degré de R et S).

Un exemple

On considère l'équation différentielle $(E) :\ y'' - 3y' + 2y = (2x+3)\mathrm{e}^{x} + (4x-5)\mathrm{e}^{-x}$.

L'équation caractéristique est $(C) :\ r^2 - 3r + 2 = 0$, de racines $r = 1$ et $r = 2$.

La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{2x}$, avec λ, μ dans $\mathbb{K}$ (disons dans $\mathbb{R}$).

On écrit le second membre $f(x) = g(x) + h(x)$, avec $g(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{x}$ et $h(x) = (4x-5)\mathrm{e}^{-x}$.

On considère donc séparément les équations $\begin{cases} (E_1) :\ y'' - 3y' + 2y = (2x+3)\mathrm{e}^{x} \\ (E_2) :\ y'' - 3y' + 2y = (4x-5)\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Tout d'abord $r = 1$ est une racine simple de (C).

On cherche donc une solution $(E_1) :\ y'' - 3y' + 2y = (2x+3)\mathrm{e}^{x}$ sous la forme $y_1(x) = x(ax+b)\mathrm{e}^{x}$.

Ensuite $r = -1$ n'est pas racine de (C).

On cherche une solution $(E_2) :\ y'' - 3y' + 2y = (4x-5)\mathrm{e}^{-x}$ sous la forme $y_1(x) = (cx+d)\mathrm{e}^{-x}$.