Chapitre 6

Suites numériques

Sommaire

6.1 Généralités sur les suites réelles

6.1.1 Suites d'un ensemble quelconque

Définition 6.1.1 (suites d'éléments d'un ensemble E)
Une *suite* d'éléments d'un ensemble E est une fonction (une application) de $\mathbb{N}$ dans E.
Il revient au même de dire que u est une famille d'éléments de E indicée par $\mathbb{N}$.
Plutôt que de noter $u(n)$ l'image d'un entier n, on note en général u_n.
La suite u est elle-même notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$, ou simplement (u_n).
On dit que u_n est le *terme d'indice* n (ou *terme général*) de la suite u, et que u_0 en est le *terme initial.*

Suites numériques
On parle de suite *numérique* si $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, *réelle* si $E = \mathbb{R}$, *complexe* si $E = \mathbb{C}$.
La donnée d'une suite complexe $(z_n)_{n\geqslant 0}$ équivaut à celle de deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, z_n = u_n + iv_n$, c'est-à-dire $u_n = \text{Re}(z_n)$ et $v_n = \text{Im }(z_n)$.
Conformément au programme, l'essentiel de ce chapitre est consacré aux suites réelles.

Remarques importantes
Deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont égales si et seulement si $u_n = v_n$ pour tout n. Il suffit donc qu'il existe au moins un entier n tel que $u_n \neq v_n$ pour que les deux suites soient considérées comme distinctes.
On ne confondra pas une suite u (c'est-à-dire une fonction définie sur $\mathbb{N}$) avec l'ensemble des valeurs que prend cette fonction. Par exemple, les suites de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ sont distinctes (mieux que ça, on a $u_n \neq v_n$ pour tout n), mais elles ont le même ensemble de valeurs $\{-1, 1\}$.

Enfin, on ne confondra **jamais** la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ avec son terme général u_n.
Ceci est particulièrement important si on choisit la notation (u_n) pour désigner la suite u.

Suites périodiques, stationnaires
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est *constante* s'il existe un élément a tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a$.
On dit qu'elle est *stationnaire* s'il existe un élément a et un entier n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n = a$.
On dit qu'elle est *p-périodique* s'il existe un entier strictement positif p tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.
Le plus petit p de $\mathbb{N}^*$ ayant cette propriété est appelé <u>la</u> période de la suite u.

Suites définies « à partir d'un certain rang »
On est souvent amené à considérer des suites définies non sur $\mathbb{N}$, mais sur $[\![n_0, +\infty[$ (n_0 dans $\mathbb{N}$).
Dans ce cas, le terme initial de la suite est bien sûr u_{n_0}, et la suite elle-même est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
Cela n'a pas vraiment d'importance dans la mesure où les propriétés essentielles des suites numériques, notamment en ce qui concerne les limites, sont encore vraies si les hypothèses (majoration, monotonie par exemple) sont vraies « à partir d'un certain rang ».
C'est pour cette raison que la notation (u_n) est encore acceptable pour désigner une telle suite u.
Une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.
Dans la suite, on considéra des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (une suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ s'y ramène en posant $u_n = v_{n-n_0}$).

6.1.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 6.1.2 (suites réelles majorées ou minorées)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.
On dit que la suite u est *majorée* s'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
Elle est dite *minorée* s'il existe m dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
Elle est dite *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

Dire qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* (resp. minorée) équivaut à dire que l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs prises par cette suite est une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.

Dire qu'une suite **réelle** est bornée, c'est dire qu'elle est à la fois minorée et majorée. Cela revient aussi à dire qu'elle est *majorée en valeur absolue*.

6.1.3 Suites réelles monotones

Définition 6.1.3 (suites réelles monotones)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.
La suite u est dite *croissante* si, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Elle est dite *décroissante* si, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Elle est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Définition 6.1.4 (suites réelles strictement monotones)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.
La suite u est dite *strictement croissante* si, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n < u_{n+1}$.
Elle est dite *strictement décroissante* si, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} < u_n$.
Elle est dite *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

– Quand une suite est dite monotone, sans plus de précision, il s'agit de monotonie « au sens large ».
– Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.
  Dire que u est *croissante* c'est dire que, pour tous m, n de $\mathbb{N}$, on a : $m \leqslant n \Rightarrow u_m \leqslant u_n$.
  Dire que u est *décroissante* c'est dire que, pour tous m, n de $\mathbb{N}$, on a : $m \leqslant n \Rightarrow u_m \geqslant u_n$.
– La monotonie d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ se mesure en comparant deux termes consécutifs u_n et u_{n+1}.
  C'est une différence importante avec les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
  En effet, pour qu'une telle fonction soit monotone, il ne suffit pas de comparer $f(x+1)$ avec $f(x)$.
  Penser par exemple à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$.
– Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Notons $-u$ la suite de terme général $-u_n$.
  Si l'une des deux suites u ou $-u$ est minorée (resp. majorée), alors l'autre est majorée (resp. minorée).
  Si l'une des deux est croissante (resp. décroissante), alors l'autre est décroissante (resp. croissante).
  Si l'une est strictement monotone, l'autre est strictement monotone mais de monotonie contraire.
  Ces remarques montrent que, quitte à remplacer la suite u par la suite $-u$, on peut tojours se ramener à une suite croissante, ou à une suite majorée.

Le résultat suivant sera utile quand on parlera de « suites extraites » :

Proposition 6.1.1 (suites strictement croissantes d'entiers naturels)
Soit $n \mapsto \varphi(n)$ une suite strictement croissante d'entiers naturels.
Alors, on a $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Attention : l'hypothèse selon laquelle les $\varphi(n)$ sont dans $\mathbb{N}$ est indispensable.

Démonstration
On procède par récurrence. On a $\varphi(0) \geqslant 0$. Supposons $\varphi(n) \geqslant n$, avec $n \geqslant 0$.
Alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1) > n \Rightarrow \varphi(n+1) \geqslant n+1$ (car $\varphi(n+1)$ est entier.)
Cela démontre la propriété au rang n et achève la récurrence.

6.2 Limite d'une suite réelle

6.2.1 Limite finie ou infinie

Définition 6.2.1
Soit $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels.
- On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$.
- On dit que la suite u tend vers $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant A$.
- Soit ℓ un nombre réel.
  On dit que la suite u tend vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a ainsi donné un sens à la phrase « la suite u tend vers ℓ », avec ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
On pourrait dire « la suite u tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ », mais ce n'est pas vraiment utile, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le rôle de n dans cette définition.
On pourra comparer les définitions précédentes avec celles données en classe Terminale S :
- *La suite u tend vers ℓ réel si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang*
- *La suite u tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang*

Définition 6.2.2
Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si la suite u tend vers ℓ on note simplement $u_n \to \ell$.

Proposition 6.2.1 (unicité de la limite si existence)
Soit $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels, tendant vers ℓ, avec ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Alors ℓ est le seul élément de $\overline{\mathbb{R}}$ à posséder cette propriété.
On l'appelle la limite *de la suite u, et on note $\ell = \lim u_n$.*

Remarque : on peut noter $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, notamment en présence d'autres variables.
Par exemple, pour lever toute ambiguïté, on écrira : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5m}{3n+7m} = \dfrac{2}{3}$ et $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{2n+5m}{3n+7m} = \dfrac{5}{7}$.

Démonstration — Supposons que la suite u admette les limites réelles ℓ et ℓ'. Donnons nous $\varepsilon > 0$.

Par définition, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

De même, il existe n_1 dans $\mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$.

Soit $n = \max(n_0, n_1)$. Alors $|\ell' - \ell| = |(u_n - \ell) - (u_n - \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$.

L'inégalité $|\ell' - \ell| \leqslant 2\varepsilon$, vraie pour tout $\varepsilon > 0$, implique $\ell' = \ell$.

— Il reste à constater (ce qui résulte immédiatement des définitions) que la suite u ne peut pas simultanément admettre une limite réelle ℓ et une limite dans $\{-\infty, +\infty\}$, ou encore qu'elle ne peut pas admettre simultanément les limites $-\infty$ et $+\infty$

6.2.2 Suites convergentes ou divergentes

Définition 6.2.3

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.

On dit que la suite u est *convergente* si elle admet une limite *finie*, c'est-à-dire une limite ℓ dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si la suite u n'a pas de limite, ou si elle tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on dit qu'elle est *divergente*.

Proposition 6.2.2 (toute suite convergente est bornée)

Si une suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est convergente, alors elle est bornée.*

La réciproque est fausse. Par exemple, la suite $n \mapsto (-1)^n$ est bornée, mais n'a pas de limite.

Toute suite de réels qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est non bornée. Mais là encore la réciproque est fausse : la suite $n \mapsto (-1)^n n$ n'est pas bornée, mais ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ (elle n'a pas de limite).

Il ne faut pas croire qu'une suite tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est nécessairement croissante (resp. décroissante) au moins à partir d'un certain rang. Considérer par exemple $n \mapsto u_n = n + (-1)^n$.

6.2.3 Opérations sur les limites

Dans cette sous-section, on note $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de nombres réels.

Proposition 6.2.3 (limite et valeur absolue)

Si $\lim u_n = \ell$, *alors* $\lim |u_n| = |\ell|$

Ce résultat est encore valable si $\ell = -\infty$ ou $\ell = +\infty$, à condition de noter $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$.

L'existence de $\lim |u_n|$ n'implique pas celle de $\lim u_n$, comme comme on le voit avec $u_n = (-1)^n$.

En revanche, on a l'équivalence : $\lim u_n = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim |u_n| = 0$.

Si ℓ est un réel, on a les équivalences : $\lim u_n = \ell \ \Leftrightarrow\ \lim(u_n - \ell) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim |u_n - \ell| = 0$.

Proposition 6.2.4 (limites et combinaisons linéaires)

Soit α *et* β *deux réels. Si* $\lim u_n = \ell$ *et si* $\lim v_n = \ell'$, *alors* $\lim(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha\ell + \beta\ell'$

Ce résultat s'étend si ℓ ou ℓ' sont dans $\{-\infty, +\infty\}$, à condition que $\alpha\ell + \beta\ell'$ ait un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Ainsi, on ne peut rien dire en général pour $\lim(u_n + v_n)$ si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$.

On dit dans ce cas qu'on est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » .
Il faut alors faire une étude spécifique et « lever » cette indétermination.

Proposition 6.2.5 (limites et produits)
Si $\lim u_n = \ell$ *et* $\lim v_n = \ell'$*, alors* $\lim(u_n\, v_n) = \ell\,\ell'$.

Ce résultat s'étend si ℓ ou ℓ' sont dans $\{-\infty, +\infty\}$, à condition que $\ell\,\ell'$ ait un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Ainsi, on ne peut rien dire en général pour $\lim(u_n v_n)$ si $\lim u_n = 0$ et si $\lim v_n \in \{-\infty, +\infty\}$.
On dit dans ce cas qu'on est en présence de la forme indéterminée « $0\,\infty$ » .
Il faut alors faire une étude spécifique et « lever » cette indétermination.

Proposition 6.2.6 (produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée)
Si $\lim u_n = 0$ *et si la suite* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *est bornée, alors* $\lim(u_n\, v_n) = 0$.

Proposition 6.2.7
Si $\lim u_n = \ell$*, avec* ℓ *dans* $\mathbb{R}^*$*, alors il existe* n_0 *dans* $\mathbb{N}$ *tel que :* $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \geqslant \dfrac{1}{2}\,|\ell|$.
En particulier, pour tout $n \geqslant n_0$*, on a la majoration :* $\dfrac{1}{|u_n|} \leqslant \dfrac{2}{|\ell|}$.

Proposition 6.2.8 (limites et inverses)
Si $\lim u_n = \ell$*, avec* ℓ *dans* $\mathbb{R}^*$*, il existe un entier à partir duquel* $u_n \neq 0$*. On a alors* $\lim \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.
Si $\lim u_n = 0$ *et si les* u_n *sont strictement positifs, alors* $\lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.
De même, si $\lim u_n = 0$ *et si les* u_n *sont strictement négatifs, alors* $\lim \dfrac{1}{u_n} = -\infty$.
Si $\lim u_n = -\infty$ *ou* $\lim u_n = +\infty$*, alors* $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Ce qui précède permet de conclure dans le calcul de $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$, sauf dans les cas suivants :
– Si $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$, on parle de la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ »
– Si $\lim u_n = \pm\infty$ et $\lim v_n = \pm\infty$, on parle de la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Pour $\lim\, {u_n}^{v_n}$, il y a trois formes indéterminées, se ramenant à « $0\,\infty$ » car $u_n^{v_n} = \mathrm{e}^{v_n \ln(u_n)}$

Ces trois formes indéterminées sont : $\begin{cases} \text{« } 1^\infty \text{ » si } \lim u_n = 1 \text{ et } \lim v_n \pm\infty \\ \text{« } \infty^0 \text{ » si } \lim u_n = +\infty \text{ et } \lim v_n = 0 \\ \text{« } 0^0 \text{ » si } \lim u_n = 0^+ \text{ et } \lim v_n = 0 \end{cases}$

Avec une forme indéterminée, tout est possible : il faut faire une étude spécifique pour chaque cas.

6.2.4 Passage à la limite et inégalités

Proposition 6.2.9 (conservation des inégalités larges)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *deux suites réelles, de limites respectives* ℓ *et* ℓ' *dans* $\overline{\mathbb{R}}$.
S'il existe un entier n_0 *tel que* $u_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n \geqslant n_0$*, alors* $\ell \leqslant \ell'$.

Cas particuliers

- On exprime cette propriété en disant que le passage à la limite « conserve les inégalités larges ».
  En revanche, si $u_n < v_n$ pour $n \geqslant n_0$, alors on ne peut (là encore) affirmer que $\ell \leqslant \ell'$.
- Cas particuliers : Soit λ un réel (le cas le plus utile étant $\lambda = 0$), et n_0 un entier naturel.
  Si on a l'inégalité $u_n \geqslant \lambda$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, alors $\ell \geqslant \lambda$.
  Si on a l'inégalité $u_n \leqslant \lambda$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, alors $\ell \leqslant \lambda$.

Proposition 6.2.10
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle, de limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si $\ell < \lambda$, alors il existe un entier n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n < \lambda$.
Si $\ell > \lambda$, alors il existe un entier n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > \lambda$.

Le résultat précédent est souvent utilisé avec $\lambda = 0$: par exemple, si $\lim u_n = \ell > 0$, alors il existe un rang à partir duquel les u_n sont tous strictement positifs.

Convergence par encadrement

Proposition 6.2.11 (« principe des gendarmes »)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$, $(w_n)_{n\geqslant 0}$ trois suites réelles.
On suppose que $\lim u_n = \lim v_n = \ell$, où ℓ est dans $\mathbb{R}$.
S'il existe un entier n_0 tel que : $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors $\lim w_n = \ell$.

Cas particulier : si $\lim u_n = 0$, et s'il existe n_0 tel que $|v_n| \leqslant |u_n|$ pour $n \geqslant n_0$, alors $\lim v_n = 0$.

Divergence par minoration ou majoration

Proposition 6.2.12 (autres propriétés liées à la relation d'ordre)
Si $\lim u_n = +\infty$ s'il existe un entier n_0 tel que $v_n \geqslant u_n$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors $\lim v_n = +\infty$.
Si $\lim u_n = -\infty$ s'il existe un entier n_0 tel que $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors $\lim v_n = -\infty$.

Proposition 6.2.13 (convergence ou divergence par comparaison de quotients)
Soit u et v deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, et telles que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geqslant n_0$.
Dans ces conditions, si $\lim v_n = 0$ alors $\lim u_n = 0$.
De même, si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Quelques limites utiles

Soit a un réel strictement supérieur à 1, et soit k un réel strictement positif.
Alors on a les limites : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$

6.3 Limites des suites monotones

6.3.1 Théorème de la suite monotone

Proposition 6.3.1 (limite d'une suite réelle croissante)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite croissante de nombres réels.*
Si cette suite est majorée, alors elle est convergente. Plus précisément, $\lim u_n = \sup\{u_n, n \geqslant 0\}$.
Si au contraire cette suite n'est pas majorée, alors $\lim u_n = +\infty$.

On retiendra le « *théorème de la suite monotone* » : toute suite réelle monotone possède une limite.

En considérant la suite de terme général $(-u_n)_{n\geqslant 0}$, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 6.3.2 (limite d'une suite réelle décroissante)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite décroissante de nombres réels.*
Si cette suite est minorée, alors elle est convergente. Plus précisément, $\lim u_n = \inf\{u_n, n \geqslant 0\}$.
Si au contraire cette suite n'est pas minorée, alors $\lim u_n = -\infty$.

Le résultat suivant constitue une sorte de réciproque des deux propositions précédentes :

Proposition 6.3.3
Soit X *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$.
Alors il existe une suite u *d'éléments de* X *telle que* $\lim u_n = \sup X$.
On peut même faire en sorte que la suite u *soit croissante.*
De même, si X *est non vide minorée, il existe une suite décroissante* u *de* X *telle que* $\lim u_n = \inf X$.

Penser à étudier la monotonie

L'étude d'une suite réelle passe très souvent par celle de sa monotonie.
C'est donc un réflexe utile que de vérifier si la suite étudiée est croissante ou décroissante.
En général, on étudiera pour cela le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Mais si le terme général u_n s'exprime sous forme de produits, de puissances ou de factorielles, il pourra être plus simple de comparer le rapport u_{n+1}/u_n avec la valeur 1 (mais attention cependant au signe de u_n avant de conclure !).

6.3.2 Suites adjacentes

Définition 6.3.1 (suites adjacentes)
On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont *adjacentes* si l'une d'elles est croissante, si l'autre est décroissante, et si $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Proposition 6.3.4 (théorème des suites adjacentes)
Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *deux suites réelles adjacentes.*
Alors ces deux suites sont convergentes et elles ont la même limite.

6.4 Suites extraites

6.4.1 Notion de suite extraite

Définition 6.4.1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'un ensemble E quelconque. On appelle *suite extraite* de u toute suite v de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Rappel : avec les notations de l'énoncé, et pour tout entier n, on a l'inégalité $\varphi(n) \geqslant n$.

On considère souvent $\begin{cases} \text{la suite } (u_{2n})_{n\geqslant 0} \text{ des termes d'indices pairs : } \varphi(n) = 2n, \\ \text{la suite } (u_{2n+1})_{n\geqslant 0} \text{ des termes d'indices impairs : } \varphi(n) = 2n+1. \end{cases}$

On utilise aussi l'expression « sous-suite de u » pour désigner une suite extraite de u.

Sous-suite d'une sous-suite

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'un ensemble E quelconque.
Soit $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite extraite de la suite u. Soit $w = (w_n)_{n\geqslant 0}$ une suite extraite de la suite v.
Alors w est une suite extraite de la suite u.

Ce résultat peut sembler évident, mais il y a quand même une subtilité.

Plus précisément, si φ et ψ sont deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans lui-même telles que $v_m = u_{\varphi(m)}$ et $w_n = v_{\psi(n)}$ pour tous entiers naturels m, n, alors (en posant $m = \psi(n)$) :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ w_n = v_m = u_{\varphi(m)} = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{\theta(n)}, \text{ avec } \theta = \varphi \circ \psi \text{ (et non pas } \theta = \psi \circ \varphi \text{ !!)}$$

6.4.2 Limites et suites extraites

Proposition 6.4.1 (limite des suites extraites)

Si la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ a pour limite ℓ, alors toute suite extraite de u admet encore ℓ pour limite.

Le fait qu'une suite extraite de u possède une limite ℓ ne signifie pas que la suite u tende vers ℓ, ni même possède une limite (mais tout de même, ℓ devient la « seule limite possible » de u).

Si deux suites extraites de u ont des limites différentes, on est cependant certain que u n'a pas de limite. Cette remarque est souvent utilisée pour montrer qu'une suite u est divergente.

Proposition 6.4.2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.

On suppose que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont une même limite ℓ. Alors $\lim u_n = \ell$.

6.4.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce résultat possède des conséquences théoriques importantes :

Proposition 6.4.3 (théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée de $\mathbb{R}$, on peut extraire une suite convergente.

Le théorème ne dit pas comment extraire une telle suite convergente, il dit simplement qu'elle existe.

6.4.4 Partie dense dans $\mathbb{R}$

Définition 6.4.2 (définition de la densité)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est dense si, pour tout intervalle ouvert non vide I, l'intersection $A \cap I$ est non vide.

Remarque : il est clair que si A est dense dans $\mathbb{R}$, et si $A \subset B$, alors B est dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 6.4.4
Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$, et soit I intervalle ouvert non vide.
Alors l'intersection $A \cap I$ est un ensemble infini.

Proposition 6.4.5 (caractérisation séquentielle de la densité)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Alors A est dense si et seulement si, pour tout réel α, il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de A telle que $\lim u_n = \alpha$.

Proposition 6.4.6 (exemples de parties denses de $\mathbb{R}$)
L'ensemble des nombres décimaux est une partie dense de $\mathbb{R}$.
L'ensemble des rationnels, et l'ensemble des irrationnels, sont des parties denses de $\mathbb{R}$.

6.5 Extension aux suites complexes

6.5.1 Limite d'une suite complexe

Définition 6.5.1 (définition d'une suite complexe)
Une suite *complexe* $z = (z_n)_{n\geqslant 0}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.
Elle est définie de façon unique par deux suites réelles x, y en notant : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = x_n + iy_n$.
Il revient au même d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}\ (z_n)$.
On dit que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est la *partie réelle* de la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$, et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sa *partie imaginaire*.

Définition 6.5.2 (limite d'une suite complexe)
Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. Soit ℓ un nombre complexe.
On dit que la suite z tend vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On exprime aussi cette situation en disant que la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente vers ℓ.

Remarques

- La définition précédente est la même que pour les suites réelles convergentes, mais il s'agit ici du module (qui généralise la notion de valeur absolue dans $\mathbb{R}$).
- La définition précédente peut aussi s'énoncer : *la suite z tend vers ℓ si tout disque fermé centré en ℓ (et de rayon strictement positif) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
- On a encore la propriété d'*unicité de la limite* (si existence), ce qui permet d'écrire $\ell = \lim z_n$.

– Si $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe, ça n'a aucun sens de dire qu'elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $(z_n)_{n\geqslant 0}$ n'admet pas de limite (c'est-à-dire si elle n'est pas convergente), elle est dite divergente.

Proposition 6.5.1 (caractérisation en termes de partie réelle et partie imaginaire)
Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe. Soit $\ell = a + ib$ un nombre complexe, avec a, b dans $\mathbb{R}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, posons $z_n = x_n + iy_n$, avec x_n et y_n dans $\mathbb{R}$.
Alors on a : $\lim z_n = \ell \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\lim x_n = a\\ \lim y_n = b\end{cases}$ *Dans ce cas, on a donc :* $\lim z_n = (\lim x_n) + i\,(\lim y_n)$.

Voici une extension aux suites complexes des propriétés sur les limites et les opérations algébriques :

Proposition 6.5.2 (limites et combinaisons linéaires)
On suppose que $\lim z_n = \ell$ et $\lim z'_n = \ell\,'$, avec ℓ et $\ell\,'$ dans $\mathbb{C}$.
Pour tous α et β dans $\mathbb{C}$, on a : $\lim(\alpha z_n + \beta z'_n) = \alpha\ell + \beta\ell\,'$
Pour le produit, on a : $\lim(z_n\, z'_n) = \ell\,\ell\,'$. *Si de plus $\ell' \neq 0$, alors on a :* $\lim \dfrac{z_n}{z'_n} = \dfrac{\ell}{\ell\,'}$.

6.5.2 Suites complexes bornées

Définition 6.5.3 (suites complexes bornées)
Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes.
On dit que la suite z est *bornée* s'il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant M$.

Proposition 6.5.3
Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe. Posons $z_n = x_n + iy_n$, avec x_n et y_n dans $\mathbb{R}$.
Alors la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont bornées.

Proposition 6.5.4 (convergence et module)
Si une suite complexe $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente, elle est bornée (réciproque fausse).
Si $\lim z_n = \ell$, alors $\lim |z_n| = |\ell|$.
On a l'équivalence : $\lim z_n = \ell \;\Leftrightarrow\; \lim(z_n - \ell) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim |z_n - \ell| = 0$.

Remarques

– Pour une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, ça n'a aucun sens de dire si elle est majorée ou minorée.
De même, on ne parlera **jamais** de la monotonie d'une suite complexe (ça n'existe pas).
– Dire qu'une suite complexe est bornée, c'est dire qu'elle est *majorée en module*.
– Si $\lim z_n = 0$ et si la suite $(z'_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors $\lim(z_n\, z'_n) = 0$.
– Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe. On suppose $\lim z_n = \ell$, avec ℓ dans $\mathbb{C}^*$.
Alors il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant n_0 \Rightarrow |z_n| \geqslant \dfrac{1}{2}\,|\ell|$. En particulier, $\dfrac{1}{|z_n|} \leqslant \dfrac{2}{|\ell|}$ pour $n \geqslant n_0$.

Proposition 6.5.5 (théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes)
De toute suite bornée de $\mathbb{C}$, on peut extraire une suite convergente.

6.6 Suites particulières

6.6.1 Suites arithmétiques

On note toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 6.6.1 (définition des suites arithmétiques)
Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *arithmétique* s'il existe un scalaire r tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.
Le scalaire r est appelé *raison* de la suite arithmétique. Il est défini de façon unique.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Quelques propriétés des suites arithmétiques

- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison r.
  Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $r > 0$ (resp. $r < 0$), elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante).
  Pour tous n, p de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$.
- Une suite arithmétique u n'est convergente que si sa raison r est nulle (et alors u est constante).
- Réciproquement, on suppose que le terme général d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'écrit $u_n = a + nb$.
  Alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.
- Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique.
  Soit d le terme débutant, et f le terme finissant cette progression : alors $S = n\dfrac{d+f}{2}$.

Proposition 6.6.1 (caractérisation des suites arithmétiques)
Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est arithmétique si et seulement si :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$.

Démonstration
La proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$ s'écrit encore : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ et elle exprime que la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ est constante.

Il revient au même de dire qu'il existe un réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$.

Cela signifie effectivement que la suite u est arithmétique.

On dit que a, b, c sont en *progression arithmétique* s'ils sont consécutifs dans une suite arithmétique.
Cela équivaut à dire que $a + c = 2b$.

6.6.2 Suites géométriques

Définition 6.6.2 (définition des suites géométriques)
Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *géométrique* s'il existe un scalaire q tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q\, u_n$.
Le scalaire q est appelé *raison* de la suite géométrique.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = q^n\, u_0$.

Remarques générales

- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite *géométrique* de raison q.
  Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est identiquement nulle, et q est quelconque.
  Si $u_0 \neq 0$, le scalaire q est défini de façon unique par $q = u_1/u_0$.
  Si $q = 1$, la suite u est constante. Si $q = 0$ elle est stationnaire en 0 (à partir de $n = 1$).
  Enfin si $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$, aucun terme de la suite u n'est nul.
- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite *géométrique* de raison q.
  Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = q^n\, u_0$, et pour $p \leqslant n$ dans $\mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p\, q^{n-p}$.
- Réciproquement, si le terme général d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'écrit $u_n = aq^n$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison q.

Monotonie des suites géométriques réelles

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 0$, la suite u garde un signe constant et est monotone. Plus précisément :
  . si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite u est positive strictement croissante.
  . si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite u est positive strictement décroissante.
  . si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite u est négative strictement décroissante.
  . si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, la suite u est négative strictement croissante.
- Si $q < 0$, alors deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} sont toujours de signes contraires.
  La suite u n'est donc pas monotone.

Proposition 6.6.2 (caractérisation des suites géométriques)
Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique si et seulement si, pour tout entier n : $u_n\, u_{n+2} = u_{n+1}^2$.

Démonstration

Supposons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = a$.

Pour tout entier n on a : $u_n\, u_{n+2} = (aq^n)(aq^{n+2}) = (aq^{n+1})^2 = u_{n+1}^2$.

Réciproquement, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n\ \ u_{n+2} = u_{n+1}^2$.

Remarquons que si $u_n = 0$, alors $u_{n+1} = 0$ puis $u_m = 0$ pour tout $m \geqslant n$.

- Si $u_1 = 0$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0$. Dans ce cas la suite u est géométrique de premier terme u_0 et de raison 0.)
- Si $u_1 \neq 0$, alors nécessairement $u_0 \neq 0$.
  Or l'égalité $u_n\, u_{n+2} = u_{n+1}^2$ montre que si $u_n \neq 0$ et $u_{n+1} \neq 0$ alors $u_{n+2} \neq 0$.
  On peut donc affirmer que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est non nul.
  L'hypothèse s'écrit alors : $\forall n \geqslant 0, \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
  Elle exprime que la suite de terme général $w_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante. Ainsi il existe q dans $\mathbb{R}$ tel que que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$: la suite u est géométrique

On dit que trois scalaires a, b, c sont en *progression géométrique* s'ils sont des termes successifs d'une suite géométrique : cela équivaut à dire que $ac = b^2$.

Soit S la somme de n termes consécutifs d'une progression géométrique de raison $q \neq 1$.

Soit u_0 le premier terme de cette progression : alors $S = u_0 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Proposition 6.6.3 (convergence des suites géométriques)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique *de raison q, et de premier terme $u_0 \neq 0$.*
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente si et seulement si $q = 1$ ou *$|q| < 1$.*
Si $q = 1$, la suite u est constante. Si $|q| < 1$, la suite u converge vers 0.

6.6.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 6.6.3 (suites arithmético-géométriques)
Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est *arithmético-géométrique* si : $\exists\,(a, b) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$

Expression du terme général

On se donne une suite arithmético-géométrique : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Si $b = 0$ (resp. $a = 1$) c'est une suite géométrique (resp. arithmétique).

Supposons $a \neq 1$: soit λ l'unique scalaire vérifiant $\lambda = a\lambda + b$. Donc $\lambda = \dfrac{b}{1 - a}$.

Si on soustrait les égalités $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \lambda = a\lambda + b \end{cases}$ on obtient $u_{n+1} - \lambda = a(u_n - \lambda)$.

La suite $n \mapsto u_n - \lambda$ est donc géométrique de raison a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \lambda = a(u_n - \lambda)$.

On en déduit l'expression de u_n : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n - \lambda = (u_0 - \lambda)a^n$, donc $u_n = (u_0 - \lambda)a^n + \lambda$.

Convergence des suites arithmético-géométriques

On se donne une suite arithmético-géométrique : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

On suppose $a \neq 1$ (donc la suite u n'est pas arithmétique).

On pose $\lambda = \dfrac{b}{1 - a}$. Si $u_0 = \lambda$, alors la suite u est constante en λ.

En revanche, si $u_0 \neq \lambda$, la suite u converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas $\lim u_n = \lambda$.

Monotonie des suites arithmético-géométriques réelles

On se donne une suite arithmético-géométrique : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ (avec a et b dans $\mathbb{R}$).

On suppose $a \neq 1$ (la suite u n'est pas arithmétique) et $a \neq 0$ (sinon la suite u est constante en b).

On pose $\lambda = \dfrac{b}{1 - a}$, et on suppose $u_0 \neq \lambda$ (sinon la suite u est constante en λ).

On a $u_{n+1} - u_n = a(u_n - u_{n-1})$ donc $u_{n+1} - u_n = a^n(u_1 - u_0) = a^n((a - 1)u_0 + b)$.

Ainsi u est monotone $\Leftrightarrow$ $a > 0$ (strictement croissante si $u_1 > u_0$, strictement décroissante sinon).

6.6.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 6.6.4 (récurrences linéaires d'ordre 2)
On dit qu'une $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}$ satisfait à une *récurrence linéaire d'ordre* 2 s'il existe a, b, c dans $\mathbb{K}$, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad (E)$.

L'équation (C) : $at^2 + bt + c = 0$ (d'inconnue t dans $\mathbb{K}$) est dite *équation caractéristique* de (E).

Remarques et exemple

– On a supposé $a \neq 0$ et $b \neq 0$ pour ne pas retomber dans le cas des suites géométriques.
La relation (E) fait donc réellement apparaître u_{n+2} et u_n.

– On sait que les suites arithmétiques sont caractérisées par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$.
Cette relation s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$.
Dans ce cas, l'équation caractéristique est $t^2 - 2t + 1 = 0$, de racine double $t = 1$.

– La « suite de Fibonacci » $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Dans ce cas, l'équation caractéristique est (C) : $t^2 - t - 1 = 0$.
Elle possède les deux racines distinctes : $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le « nombre d'or ») et $\Phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\Phi}$.

Proposition 6.6.4 (suites géométriques solutions)
Soit $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ qui vérifient la relation (E) : $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

– *Un élément u de $\mathcal{S}_E$ est défini de façon unique par la donnée de ses deux premiers termes.*
L'ensemble $\mathcal{S}_E$ est donc une famille de suites à deux paramètres.

– *Soit q un élément de $\mathbb{K}^*$. La suite géométrique $n \mapsto q^n$ est élément de $\mathcal{S}_E$ si et seulement si q est racine de l'équation caractéristique (C) : $at^2 + bt + c = 0$*

Démonstration — L'ensemble $\mathcal{S}_E$, non vide (il contient la suite nulle) et est stable par combinaison linéaire (évident).

$\mathcal{S}_E$ est donc un sous-espace de l'espace vectoriel de toutes les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'application $(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_0, u_1)$ est visiblement linéaire et elle est bijective de $\mathcal{S}_E$ sur $\mathbb{K}^2$ (toute suite de $\mathcal{S}_E$ est en effet définie de manière unique par la donnée du couple (u_0, u_1) de ses deux termes initiaux).

Cette application réalise donc un isomorphisme de $\mathcal{S}_E$ sur $\mathbb{K}^2$: ainsi $\dim \mathcal{S} = 2$.

— La suite $n \mapsto q^n$ est dans $\mathcal{S}_E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ aq^{n+2} + bq^{n+1} + cq^n = 0 \Leftrightarrow aq^2 + bq + c = 0$ (car $q \neq 0$)

Proposition 6.6.5 (solution générale dans le cas complexe)
Soit a, b, c trois nombres complexes, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Soit $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des suites de $\mathbb{C}$ qui vérifient la relation (E) : $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique (C) : $at^2 + bt + c = 0$

– *Si $\Delta \neq 0$, soit r et s les deux racines distinctes de l'équation caractéristique (C).*
Alors $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des suites $n \mapsto \lambda r^n + \mu s^n$, avec λ, μ dans $\mathbb{C}$.

– *Si $\Delta = 0$, soit r la racine double de l'équation caractéristique (C).*
Alors $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des suites $n \mapsto (\lambda n + \mu) r^n$, avec λ, μ dans $\mathbb{C}$.

Démonstration — Supposons $\Delta \neq 0$, et soit r, s les deux racines distinctes de (C).

On sait que les suites géométriques $n \mapsto r^n$ et $n \mapsto s^n$ sont éléments de $\mathcal{S}_E$.

De plus elles sont non proportionnelles. Elles forment donc une base du plan vectoriel $\mathcal{S}_E$.

Les suites de $\mathcal{S}_E$ sont donc les combinaisons de ces deux là, c'est-à-dire les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dont le terme général s'écrit $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$, pour un certain couple (λ, μ) de $\mathbb{C}^2$.

— Supposons $\Delta = 0$, et soit $r = -b/(2a)$ la racine double de (C).

On sait que la suite géométrique $n \mapsto r^n$ est élément de $\mathcal{S}_E$.

Vérifions qu'il en est de même pour la suite $n \mapsto nr^n$.

En effet : $\forall n \in \mathbb{N},\ a(n+2)r^{n+2} + b(n+1)r^{n+1} + cnr^n = r^n\bigl(n(\underbrace{ar^2+br+c}_{=0}) + r(\underbrace{2ar+b}_{=0})\bigr) = 0.$

Les deux suites $n \mapsto nr^n$ et $n \mapsto r^n$ sont non proportionnelles.

Elles forment donc une base du plan vectoriel $\mathcal{S}_E$.

Les suites de $\mathcal{S}_E$ sont donc les combinaisons de ces deux là, c'est-à-dire les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dont le terme général s'écrit $u_n = \lambda nr^n + \mu r^n = (\lambda n + \mu)r^n$, pour un certain couple (λ, μ) de $\mathbb{C}^2$

Proposition 6.6.6 (solution générale dans le cas réel)

Soit a, b, c trois nombres réels, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soit $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des suites de $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation $(E) : \forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique (C) : $at^2 + bt + c = 0$

- *Si $\Delta > 0$, soit r et s les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique (C).*
  Alors $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des suites $n \mapsto \lambda r^n + \mu s^n$, avec λ, μ dans $\mathbb{R}$.
- *Si $\Delta = 0$, soit r la racine réelle double de l'équation caractéristique (C).*
  Alors $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des suites $n \mapsto (\lambda n + \mu)r^n$, avec λ, μ dans $\mathbb{R}$.
- *Si $\Delta < 0$, soit $r = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$ les racines conjuguées distinctes de (C), avec $\theta \neq 0\ [\pi]$.*
  Alors $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble des suites $n \mapsto (\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))\rho^n$, avec λ, μ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

— Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, c'est la même démonstration que dans le cas complexe.

— Si $\Delta < 0$, soit $r = \rho e^{i\theta}$ l'une des racines complexes non réelles de (C), l'autre étant $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$.

On sait que les suites complexes $n \mapsto r^n = \rho^n e^{in\theta}$ et $n \mapsto \overline{r}^{\,n} = \rho^n e^{-in\theta}$ vérifient (E).

Il en est donc de même des suites $n \mapsto v_n = \mathrm{Re}(r^n) = \dfrac{1}{2}(r^n + \overline{r}^{\,n})$ et $n \mapsto w_n = \mathrm{Im}\ (r^n) = \dfrac{1}{2i}(r^n - \overline{r}^{\,n})$

Mais $n \mapsto v_n = \rho^n\cos(n\theta)$ et $n \mapsto w_n = \rho^n\sin(n\theta)$ sont à valeurs réelles.

De plus elles sont non proportionnelles car $(v_0, w_0) = (1, 0)$ et $(v_1, w_1) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, avec $\rho\sin\theta \neq 0$.

Les deux suites v et w forment donc une base du plan vectoriel $\mathcal{S}_E$ des suites réelles vérifiant (E).

Les suites de $\mathcal{S}_E$ sont les combinaisons de ces deux là, c'est-à-dire les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dont le terme général s'écrit $u_n = \lambda v_n + \mu w_n = (\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))\rho^n$, pour un certain couple (λ, μ) de $\mathbb{R}^2$

6.6.5 Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 6.6.5 (suite définie par récurrence)
Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{K}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit a un élément de $\mathcal{D}$. On peut définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}$ par :
– la donnée de son terme initial $u_0 = a$ dans $\mathcal{D}$.
– la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
On dit alors que la suite u est définie *par récurrence*.

Remarque sur le domaine de définition

Avec les notations précédentes, il faut s'assurer de l'existence de la suite u.
On doit donc vérifier que les u_n sont dans $\mathcal{D}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
C'est évidemment très simple si on sait que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
Prenons l'exemple de la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : u_0 dans $\mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.
Pour que cette suite ait un sens, il faut en particulier que u_1 existe, c'est-à-dire $u_0 \leqslant 1$.
Mais pour que u_2 existe il faut $u_1 = \sqrt{1 - u_0} \leqslant 1$, c'est-à-dire $u_0 \geqslant 0$.
Enfin, la condition $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ est suffisante car $[0, 1]$ est stable par $f : x \mapsto \sqrt{1 - x}$.

Proposition 6.6.7 (limites « éventuelles » d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par le choix de u_0 dans $\mathcal{D}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite u converge vers un élément ℓ de $\mathcal{D}$, alors la limite vérifie $f(\ell) = \ell$.
Résoudre l'équation $f(x) = x$ donne donc les limites éventuelles *de la suite u dans l'ensemble $\mathcal{D}$.*

Limites éventuelles et intervalles stables

Pour une suite définie par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, et si f est continue, on trouvera les limites éventuelles en cherchant les « points fixes » de f, c'est-à-dire en résolvant l'équation $f(x) = x$.

Il est recommandé d'étudier le signe de $f(x) - x$, et d'identifier des intervalles stables par f (souvent un intervalle séparant deux points fixes successifs de f).

Voici par exemple une situation typique :
– Supposons que α et β soient les seules solutions de $f(x) = x$.
– Supposons en outre que $\alpha < x < \beta \Rightarrow \alpha < f(x) < x < \beta$.
– Si $\alpha < u_0 < \beta$, alors par une récurrence évidente : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \alpha < u_{n+1} < u_n < \beta$
– On conclut que la suite u, décroissante minorée, converge vers α (seule limite possible ici).

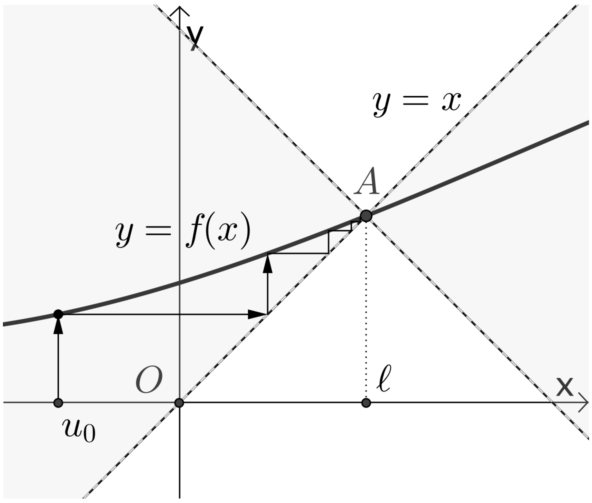
Utilisation de représentations graphiques

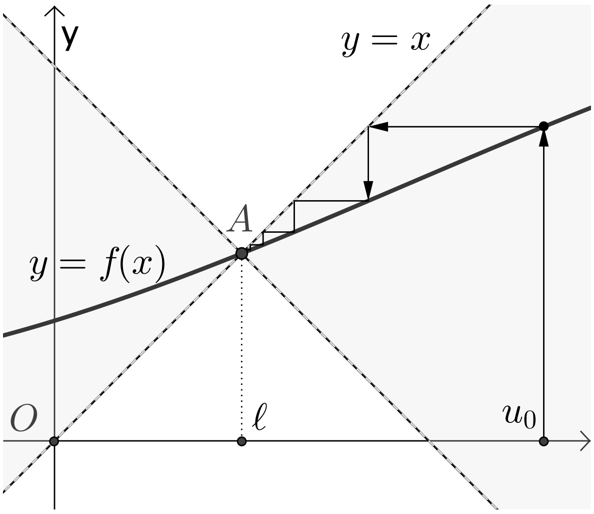
Pour illustrer le comportement d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on utilise souvent des représentations graphiques « en escaliers » ou « en spirale » (le terme utilisé dépend de la monotonie de la suite au voisinage de sa limite).
On voit ci-dessous l'illustration de la convergence d'une telle suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers sa limite ℓ.

On a tracé la courbe $y = f(x)$, la droite $y = x$, ainsi que la perpendiculaire à cette droite qui passe par le « point-limite ». La partie grisée est la « zone de convergence » : si la courbe $y = f(x)$ reste dans cette zone au voisinage de $A(\ell, \ell)$, la suite (u_n) converge vers ℓ.

La convergence est d'autant plus rapide que la tangente à la courbe en A est proche de l'horizontale.

On voit sur ces deux exemples que le fait que f soit croissante implique seulement que (u_n) est monotone : elle est croissante si $u_1 > u_0$ (figure de gauche), et elle est décroissante si $u_1 < u_0$ (figure de droite).

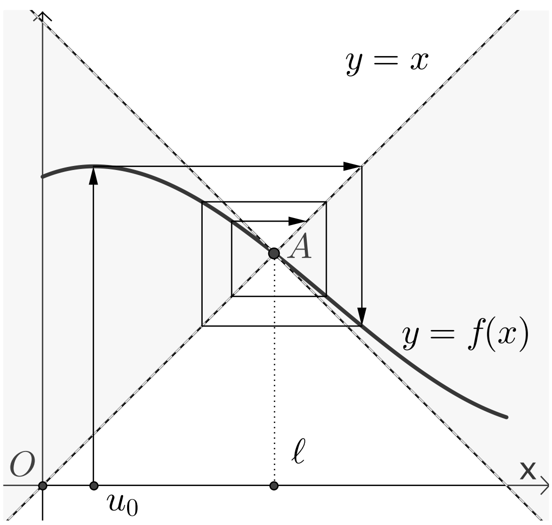


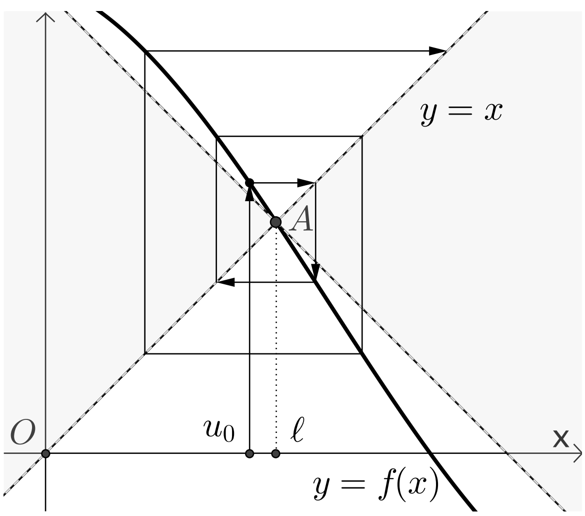


Dans les deux illustrations ci-dessous, on considère le comportement de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ au voisinage d'un point fixe ℓ de f. Dans les deux cas, f est décroissante au voisinage de ℓ, et il en résulte que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas monotone (en revanche les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones).

Dans l'exemple de gauche, on a $|f'(\ell)| < 1$, et la courbe $y = f(x)$ reste dans la zone de convergence au voisinage de A (on exprime cette situation en disant que ℓ est un point fixe « attractif » de f). Il en résulte que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge effectivement vers ℓ, et de façon alternée (et assez lentement sur notre exemple car la dérivée de f en a est proche de la valeur -1).

Dans l'exemple de droite, on a $|f'(\ell)| > 1$, et la courbe $y = f(x)$ sort de la zone de convergence au voisinage de A (on dit que ℓ est un point fixe « répulsif » de f). Il en résulte que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers ℓ (même si u_0 est proche de ℓ, les u_n s'en éloignent progressivement).





6.6.6 Exemples de suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

▷ **Exemple n°1**

Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 > 0$ et par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

Une récurrence immédiate montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est « bien définie » et que $u_n > 0$ pour tout n.

Si on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, on observe que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1+u_n}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} + 1 = v_n + 1$.

Autrement dit, la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique de raison 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on en déduit : $v_n = v_0 + n = \dfrac{1}{u_0} + n = \dfrac{nu_0+1}{u_0}$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{u_0}{nu_0+1}$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante de limite 0.

Ce premier exemple est quand même très particulier. Il est en effet très rare qu'on puisse trouver comme on l'a fait ici l'expression générale de u_n.

▷ **Exemple n°2**

Étudier la suite (u_n) définie par u_0 réel et $u_{n+1} = u_n(1+u_n)$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$. La suite u est donc croissante.
La seule limite finie *possible*, donnée par $\ell = \ell(1+\ell)$, est $\ell = 0$.

– Si $u_0 > 0$, il est clair que $u_n > 0$ pour tout n.
  On en déduit $\lim u_n = +\infty$ (en effet la suite est croissante et ne peut donc pas converger vers 0).
– Si $u_0 < -1$, on a $u_1 = u_0(1+u_0) > 0$ et on est ramené au cas précédent : $\lim u_n = +\infty$.
– Si $u_0 = 0$, la suite u est constante : $\forall n \geqslant 0, u_n = 0$.
– Si $u_0 = -1$, on a $u_1 = 0$ ce qui ramène au cas précédent : $\forall n \geqslant 1, u_n = 0$.
– Si $-1 < u_0 < 0$:
  Pour tout x de $]-1, 0[$, on a $-1 < x < f(x) < 0$.
  L'intervalle $]-1, 0[$ est donc stable par f. On en déduit : $\forall n \geqslant 0, -1 < u_n < 0$.
  La suite u, croissante et majorée, est convergente. Nécessairement $\lim u_n = 0$.

Conclusion : si $-1 \leqslant u_0 \leqslant 0$ alors $\lim u_n = 0$, sinon $\lim u_n = +\infty$.

▷ **Exemple n°3**

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq 1$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{u_n-1}$.

La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

On commence par étudier la fonction f, définie pour $x \neq 1$.

On constate que pour tout $x \neq 1$, $f(x) - 1 = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ est non nul.

Puisque $u_0 \neq 1$, on en déduit que la suite u est parfaitement définie.

On a $f(x) - x = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $f(x) = x \Leftrightarrow x = -1$.

La seule limite finie *possible* de la suite u est donc $\ell = -1$.

Pour tout $x \neq 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

Dans toute la suite, on note $\begin{cases} \alpha = 1 - \sqrt{2} \\ \beta = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

Avec ces notations, on peut écrire :

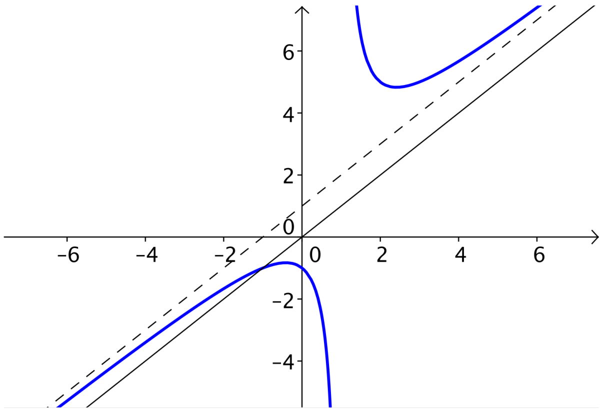
$$\forall x \neq 1, f'(x) = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-1)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations de f.

On y ajoute le signe de $f(x) - x = \dfrac{x+1}{x-1}$.

	$-\infty$		-1		α		0		-1		β		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0		$-$		‖	$-$	0		$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	2α	↘	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2β	↗	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0				$-$		‖		$+$		

Voici la courbe représentative de f (avec l'asymptote $y = x + 1$ et la bissectrice $y = x$)



On peut maintenant étudier la suite u, suivant les valeurs de u_0.

- Si $u_0 < -1$: pour tout $x < -1$, on a : $x < f(x) < -1$. En particulier $u_0 < u_1 < -1$ et $u_1 < u_2 < -1$.
  Par une récurrence évidente, on en déduit : $\forall n \geqslant 0, u_n < u_{n+1} < -1$.
  La suite u, croissante et majorée, converge vers sa seule limite finie possible $\ell = -1$.
- Si $u_0 = -1$: dans ce cas la suite u est constante : $\forall n \geqslant 0, u_n = -1$.
- Si $-1 < u_0 < 0$: pour tout x de $]-1, 0[$, on a : $-1 < f(x) < x < 0$.
  En particulier $-1 < u_1 < u_0 < 0$ et $-1 < u_2 < u_1 < 0$.
  Par une récurrence évidente, on en déduit : $\forall n \geqslant 0, -1 < u_{n+1} < u_n < 0$.
  La suite u, décroissante et minorée, converge vers sa seule limite finie possible $\ell = -1$.
- Si $u_0 = 0$: on constate que $u_1 = f(0) = -1$, et donc : $\forall n \geqslant 1, u_n = -1$.
- Si $0 < u_0 < 1$: on a $u_1 = f(u_0) < -1$, et on est ramené au premier cas : $\lim u_n = -1$.

– Si $u_0 > 1$:
Pour tout $x > 1$ on a : $1 < x < f(x)$. En particulier $1 < u_0 < u_1$ et $1 < u_1 < u_2$.
Par une récurrence évidente, on en déduit : $\forall n \geqslant 0,\ 1 < u_n < u_{n+1}$.
La suite u est croissante ne peut pas converger vers -1 (sa seule limite finie possible).
On en déduit $u_n = +\infty$.

Conclusion : si $u_0 < 1$ on a $\lim u_n = -1$, et si $u_0 > 1$ on a $\lim u_n = +\infty$.

▷ **Exemple n°4**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{24 - 5u_n}$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{24 - 5u_n}$, définie sur $\mathcal{D} = \left]-\infty, \dfrac{24}{5}\right]$, est strictement décroissante.
L'équation $\ell = f(\ell)$ équivaut à $\ell^2 + 5\ell - 24 = 0$ et $\ell \geqslant 0$.
Or $\ell^2 + 5\ell - 24 = (\ell - 3)(\ell + 8)$. La seule limite finie possible de la suite u est donc $\ell = 3$.
On trouve $u_1 = \sqrt{19} \approx 4.359$, $u_2 = \sqrt{25 - 4\sqrt{19}} \approx 1.485$ et $u_3 = \sqrt{25 - 4\sqrt{25 - 4\sqrt{19}}} \approx 4.071$.
De même $u_4 = \sqrt{24 - 5u_3} \approx 1.908949125$, puis $u_5 = \sqrt{24 - 5u_4} \approx 3.802$, puis $u_6 = \sqrt{24 - 5u_5} \approx 2.234$.
Ces valeurs numériques indiquent que : $u_0 < u_2 < u_4 < u_6 < 3 < u_5 < u_3 < u_1$.
La fonction $g = f \circ f$ est croissante, et on a $u_{2(n+1)} = g(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = g(u_{2n+1})$.
Une récurrence facile donne alors : $u_{2n} < u_{2n+2} < 3 < u_{2n+3} < u_{2n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Ainsi les suites de terme général $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont l'une croissante majorée, l'autre décroissante minorée, donc convergentes. On va montrer qu'elles convergent toutes les deux vers 3.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - 3| = \left|\sqrt{24 - 5u_n} - 3\right| = \dfrac{5}{3 + u_{n+1}}\,|u_n - 3|$.
On sait que $u_6 \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 6$.
On en déduit $|u_{n+1} - 3| \leqslant \lambda\,|u_n - 3|$ pour tout $n \geqslant 6$, avec $\lambda = \dfrac{5}{3 + u_6} \approx 0.955 < 1$.
Il en résulte $|u_n - 6| \leqslant \lambda^{n-6}\,|u_6 - 3|$ pour tout $n \geqslant 6$, donc $\lim u_n = 3$.
La figure ci-dessous illustre la convergence (lente) de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers la valeur 3.