Chapitre 7

Limites, continuité

Sommaire

7.1 Limite en un point

7.1.1 Propriétés vraies « au voisinage d'un point »

Dans ce chapitre, on sera amené à étudier la *limite* d'une fonction en un point a (éventuellement $a = +\infty$ ou $a = -\infty$). On sera aussi conduit à comparer des fonctions f et g « au voisinage de a ».

Par exemple pour écrire que si $f \leqslant g$ alors la limite de f en a est inférieure ou égale à celle de g en a :

– il *faut* que f et g soient toutes deux définies sur un même voisinage de a.

– il *suffit* que l'inégalité $f(x) \leqslant g(x)$ soit vraie au voisinage de a.

L'expression « au voisinage de a » peut s'entendre comme « suffisamment près de a », mais cela est un peu trop familier, et ça ne traduit pas le cas où a est égal à $+\infty$ ou à $-\infty$. On donne donc une définition plus précise de l'expression « une propriété vraie au voisinage d'un point a ».

Définition 7.1.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

Soit a un élément de I ou une « extrémité » de I (éventuellement $a = \pm\infty$).

Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition, vraie ou fausse selon les valeurs d'un élément x de I.

On dit que $\mathcal{P}$ est vraie *au voisinage de* a si l'une des situations suivantes est réalisée :

· a est réel et il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

· $a = +\infty$ et il existe un réel A tel que : $\forall x \geqslant A,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie.

· $a = -\infty$ et il existe un réel A tel que : $\forall x \leqslant A,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie.

Dans le premier cas, la clause « $x \in I$ » n'est utile que si a est une *extrémité* de I.

En effet si a est *intérieur* à I, alors pour tout δ *assez petit*, $]a-\delta, a+\delta[$ est inclus dans I.

Si f et g sont des fonctions définies sur I, on pourra par exemple écrire des propositions du genre : *si* $f(x) \leqslant g(x)$ *au voisinage de* a*, alors ...*

7.1.2 Limite d'une fonction f en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 7.1.2 (limite finie en un point a de $\mathbb{R}$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.

Soit a un réel, élément ou extrémité de I. Soit ℓ un réel.

On dit que ℓ est limite de f en a si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in I \text{ et } |x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Définition 7.1.3 (limite infinie en un point a de $\mathbb{R}$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.

Soit a un réel, élément ou extrémité de I.

On dit que $+\infty$ est limite de f en a si : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ (x \in I \text{ et } |x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M$.

On dit que $-\infty$ est limite de f en a si : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ (x \in I \text{ et } |x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \leqslant M$.

Remarques

– On vient de définir le sens de l'expression « ℓ est limite de f en a », avec a dans $\mathbb{R}$ et ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, et on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

– Dans les trois cas, la clause « $x \in I$ » n'est pas nécessaire si a est intérieur à I.
Si a est dans l'intervalle de définition I de f, la seule limite *possible* de f en a est le réel $f(a)$.
Très souvent, les calculs de limites se font aux extrémités de l'intervalle de définition.

– Considérons la phrase : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in I \text{ et } |x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Cette proposition doit se lire de la façon suivante :
· pour tout réel strictement positif ε (sous entendu : « aussi petit soit-il »),
· il existe un réel strictement positif δ (qui à ce stade dépend donc certainement de ε),
· tel que, pour tout x de I, si x est à moins de δ de a, alors $f(x)$ est à moins de ε de ℓ.

– Pour réviser un peu la logique, on considère la phrase, obtenue par interversion des quantificateurs :
$$\exists \delta > 0,\ \forall \varepsilon > 0\ ,\ (x \in I \text{ et } |x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
On demande de la traduire en français, et de comprendre en quoi elle diffère de la phrase précédente.

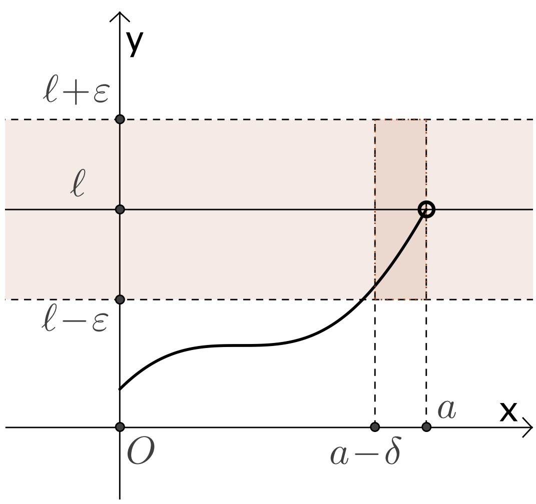
– Considérons la phrase : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ (x \in I \text{ et } |x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M$.
Cette proposition doit se lire de la façon suivante :
· pour tout réel M (sous entendu : « aussi grand soit-il du coté de $+\infty$ »),
· il existe un réel strictement positif δ (qui à ce stade dépend donc certainement de M),
· tel que, pour tout x de I, si x est à moins de δ de a, alors $f(x)$ est supérieur ou égal à M.
Dans cette phrase, on peut se limiter à $M > 0$ sans changer la portée de la définition.

– De même dans « $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (x \in I \text{ et } |x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \leqslant M$ » on peut supposer $M < 0$ (sans importance car la propriété doit être vraie pour M aussi grand qu'on veut du coté de $-\infty$).

On illustre ici le fait que ℓ (réel) est limite de f en a (réel). On suppose que f est définie sur un intervalle I dont a est l'extrémité droite.

On a choisi ici une valeur particulière de ε (un peu exagérée pour la clarté du dessin), et une valeur de δ qui « convient » pour un tel ε.

On devine que si δ convient pour ε, alors tout δ', avec $0 < \delta' < \delta$ convient aussi. Il ne sert à rien de chercher le « meilleur » δ possible (c'est-à-dire le plus grand possible) pour un ε donné. L'existence d'un certain δ (dépendant de ε) est suffisante.



7.1.3 Limite d'une fonction f en $+\infty$ ou en $-\infty$

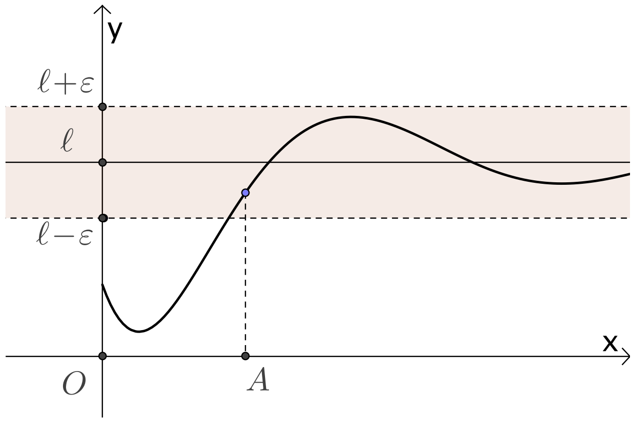
Définition 7.1.4 (limite finie en $+\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle non majoré. Soit ℓ un nombre réel.
On dit que ℓ est limite de f en $+\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

La phrase : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$ doit se lire de la façon suivante :
· pour tout réel strictement positif ε (sous entendu : « aussi petit soit-il »),
· il existe un réel A (qui à ce stade dépend donc certainement de ε),
· tel que, pour $x \geqslant A$ (c'est-à-dire « au-delà de A »), alors $f(x)$ est à moins de ε de ℓ.

On illustre le fait que ℓ (réel) est limite de f en $+\infty$. On suppose que f est définie sur un intervalle I non majoré (donc « qui va jusqu'à $+\infty$ »).

On a choisi ici une valeur particulière de ε, puis une valeur de A qui « convient » pour un tel ε.

Si A convient pour ε, tout $A' > A$ convient aussi. Il ne sert à rien de chercher le « meilleur » A possible (le plus petit possible) pour un ε donné. L'existence d'un certain A (dépendant de ε) est suffisante.



On définit ensuite la notion de limite infinie, « quand x tend vers $+\infty$ » :

Définition 7.1.5 (limite infinie en $+\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle non majoré.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $+\infty$ si : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M)$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ si : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M)$.

On examine finalement la notion de limite « quand x tend vers $-\infty$ ».

Définition 7.1.6 (limite finie en $-\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle non minoré. Soit ℓ un nombre réel.
On dit que ℓ est limite de f en $-\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ (x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

Définition 7.1.7 (limite infinie en $-\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle non minoré.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $-\infty$ si : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R},\ (x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M)$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $-\infty$ si : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R},\ (x \leqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M)$.

En définitive, on a donné un sens à l'expression « ℓ est limite de f en a », avec a et ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Pour exprimer cette situation, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, et on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

7.1.4 Unicité de la limite

Proposition 7.1.1 (Unicité de la limite)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.
Soit a dans $\overline{\mathbb{R}}$, élément ou borne de l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que ℓ est limite de f en a, au sens de l'une des définitions précédentes.
Alors ℓ est le seul élément de $\overline{\mathbb{R}}$ à posséder cette propriété.
On l'appelle la *limite de f en a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.*

Remarques

Il se peut qu'une fonction ne possède pas de limite en un point.
Par exemple, la fonction $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $-\infty$ ou en $+\infty$.
De même, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (partie entière de x) n'a pas de limite en un élément k de $\mathbb{Z}$.

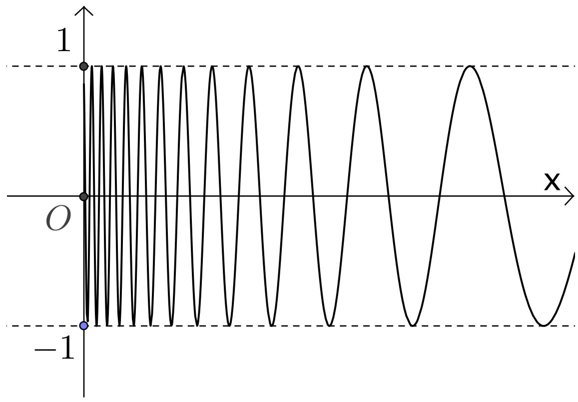
Soit f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On trace ici une partie du graphe de f.

Les oscillations de f s'accélèrent quand $x \to 0$.

Cette fonction ne possède pas de limite en 0.

En fait, sur chaque intervalle $]0, a[$, avec $a > 0$, la fonction f prend une infinité de fois chacune des valeurs du segment $[-1, 1]$.



Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions sur les limites :

Proposition 7.1.2 (limite de f en a si f est définie en a)
Si la fonction f est définie en le réel a, sa seule limite ***possible*** *en a est $f(a)$.*
Autrement dit : si $f(a)$ et la limite de f en a existent, alors nécessairement : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

7.1.5 Extensions de la notion de limite

Définition 7.1.8 (limite par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures)
On suppose que la limite de f en a (élément de $\overline{\mathbb{R}}$) est le réel ℓ.
Si $f(x) \geqslant \ell$ au voisinage de a, on dit que $f(x)$ tend en a vers ℓ « par valeurs supérieures ».
Si $f(x) \leqslant \ell$ au voisinage de a, on dit que $f(x)$ tend en a vers ℓ « par valeurs inférieures ».
On peut alors noter $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell^+$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell^-$).

Remarque

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est un réel ℓ, il n'y a aucune raison a priori pour ℓ soit « obtenu » par valeurs supérieures ou « inférieures » (c'est-à-dire pour que $f(x) - \ell$ garde un signe constant au voisinage de a).

Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$, mais le signe de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est constant sur aucun intervalle $[A, +\infty[$.

Définition 7.1.9 (limite à gauche)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I.
On suppose que le réel a est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap \,]-\infty, a\,[$.
Le réel a est donc l'extrémité droite de J, et n'appartient pas à J.
On dit que f admet ℓ pour limite en a à gauche si g admet ℓ pour limite en a.
On note alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^-} f = \ell$, ou $f(x) \underset{x\,\to\,a^-}{\longrightarrow} \ell$

Définitions équivalentes : en notant ℓ un nombre réel, on a les définitions équivalentes

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ (a-\delta \leqslant x < a) \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall\,M \in \mathbb{R},\ \exists\,\delta > 0,\ (a-\delta \leqslant x < a) \Rightarrow f(x) \geqslant M \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall\,M \in \mathbb{R},\ \exists\,\delta > 0,\ (a-\delta \leqslant x < a) \Rightarrow f(x) \leqslant M \end{cases}$$

Définition 7.1.10 (limite à droite)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I.
On suppose que le réel a est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap \,]\,a, +\infty[$.
Le réel a est donc l'extrémité gauche de J, et n'appartient pas à J.
On dit que f admet ℓ pour limite en a à droite si g admet ℓ pour limite en a.
On note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^+} f = \ell$, ou $f(x) \underset{x\,\to\,a^+}{\longrightarrow} \ell$

Définitions équivalentes : en notant ℓ un nombre réel, on a les définitions équivalentes

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ (a < x \leqslant a+\delta) \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall\,M \in \mathbb{R},\ \exists\,\delta > 0,\ (a < x \leqslant a+\delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall\,M \in \mathbb{R},\ \exists\,\delta > 0,\ (a < x \leqslant a+\delta) \Rightarrow f(x) \leqslant M \end{cases}$$

Remarque : la limite de f en a, à gauche ou à droite, si elle existe, est unique. De même, la plupart des propriétés vraies pour les limites le sont encore s'il s'agit de limites à gauche ou à droite.

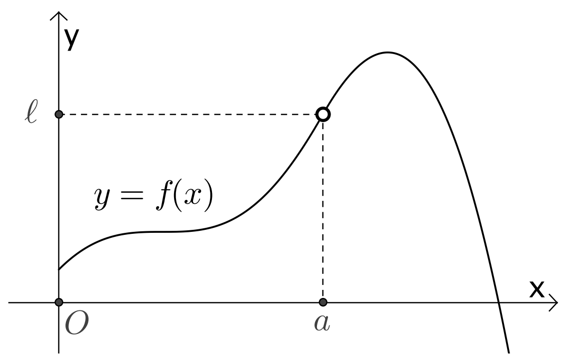
Extension de la notion de limite si f est définie sur $I \setminus \{a\}$

On suppose ici que f est définie sur $I \setminus \{a\}$, où a est un point intérieur à l'intervalle I (autrement dit la fonction f est définie sur I sauf en a).

On suppose également qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$.

Dans ces conditions, on dira encore que ℓ est la limite de f en a (même si f n'est pas définie en a).

Le plus souvent d'ailleurs, on prolongera f au point a en posant $f(a) = \ell$.



7.1.6 Importance des limites à l'origine

Le résultat suivant explique qu'on peut toujours se ramener à des limites calculées à l'origine (donc « quand x tend vers 0 »), et même (dans le cas de limites finies) à une limite égale à 0 :

Proposition 7.1.3 (importance des limites nulles ou des limites en 0)
Si a est un réel, et ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, on a l'équivalence : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(a+x) = \ell$.
Si ℓ est un réel, et a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, on a l'équivalence : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)-\ell) = 0$.

Les « limites usuelles » sont pour la plupart connues à l'origine (en 0). Pour une limite en un réel a non nul, on se ramènera donc souvent au cas usuel en posant $x = a + h$ avec « h tendant vers 0 ».

Proposition 7.1.4 (limite finie et caractère borné de f)
Soit a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est finie, alors f est bornée au voisinage de a.

7.1.7 Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 7.1.5 (caractérisation séquentielle des limites)
Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
Soit a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ (élément de I ou extrémité de I). Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite (u_n) de I tendant vers a, on a : $\lim f(u_n) = \ell$.

Cette propriété est importante pour deux raisons :

– D'une part, elle permet d'utiliser les résultats connus sur les limites de suites pour en déduire des résultats sur les limites de fonctions (voir plus loin).

– D'autre part, elle est utile pour montrer qu'une fonction ne possède pas de limite en un point a.
  Il suffit en effet de mettre en évidence deux suites (u_n) et (v_n) de l'intervalle I, tendant toutes deux vers a, et telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'aient pas la même limite.
  Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
  Posons $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$. Pour tout n, on a $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = -1$.
  Ainsi $\lim u_n = \lim v_n = 0$, mais les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'ont pas la même limite.
  Il en résulte que la fonction f n'a pas de limite en 0.

On notera bien que la proposition précédente est valable pour tous les cas particuliers de limites (en un point a de $\mathbb{R}$, ou quand x tend vers $\pm\infty$), que la limite soit elle-même un nombre réel ou $\pm\infty$.
Enfin, cette propriété se généralise aux limites à gauche et à droite.

7.2 Propriétés des limites

7.2.1 Opérations sur les limites

Proposition 7.2.1 (limite et valeur absolue)
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, *avec* ℓ *dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.

Ce résultat est encore valable si $\ell = -\infty$ ou $\ell = +\infty$, à condition de noter $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$.
L'existence de $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ n'implique pas celle de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, si on ne sait rien du signe de f.
En revanche, on a l'équivalence : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.
Si ℓ est un réel, on a les équivalences : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to a}(f(x) - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$.

Proposition 7.2.2 (limites et combinaisons linéaires)
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *et que* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, *avec* ℓ *et* ℓ' *dans* $\mathbb{R}$.
Alors $\lim\limits_{x\to a}(f + g)(x) = \ell + \ell'$.
Plus généralement, pour tout (α, β) *de* $\mathbb{R}^2$, *on a :* $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\ell + \beta\ell'$.

Ce résultat s'étend à ℓ ou ℓ' dans $\{-\infty, +\infty\}$, à condition que $\alpha\ell + \beta\ell'$ ait un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Ainsi, on ne peut rien dire en général pour $\lim\limits_{x\to a}(f + g)(x)$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.
On dit dans ce cas qu'on est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » .
Il faut alors faire une étude spécifique et « lever » cette indétermination.

Proposition 7.2.3 (limites et produits)
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, *avec* ℓ *et* ℓ' *dans* $\mathbb{R}$. *Alors* $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \ell\ell'$.

Ce résultat s'étend à ℓ ou ℓ' dans $\{-\infty, +\infty\}$, à condition que $\ell\,\ell'$ ait un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Ainsi, on ne peut rien dire en général pour $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$.
On dit dans ce cas qu'on est en présence de la forme indéterminée « $0\,\infty$ ».
Il faut alors faire une étude spécifique et « lever » cette indétermination.

Proposition 7.2.4 (majoration ou minoration de l'inverse)
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, *avec* ℓ *dans* $\mathbb{R}^*$, *alors au voisinage de* a : $|f(x)| \geqslant \dfrac{1}{2}\,|\ell|$, *donc* $\dfrac{1}{|f(x)|} \leqslant \dfrac{2}{|\ell|}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell > 0$ *(resp.* $\ell < 0$*), alors au voisinage de* a : $f(x) > \dfrac{\ell}{2} > 0$ *(resp.* $f(x) < \dfrac{\ell}{2} < 0$*).*

Proposition 7.2.5 (limites et passage à l'inverse)
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, *avec* ℓ *dans* $\mathbb{R}^*$, *alors* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *et* $f(x) > 0$ *(resp.* $f(x) < 0$*) au vois. de* a, *alors* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ *(resp* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$*).*
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Ce qui précède permet de conclure dans le calcul de $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, sauf dans les cas suivants :

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, on parle de la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ »
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$, on parle de la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Pour $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, trois formes indéterminées se ramènent à « $0\,\infty$ » car $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))}$:

Ces trois formes indéterminées sont $\begin{cases} \text{« } 1^\infty \text{ » si } \lim\limits_{x\to a} f(x)=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty \\ \text{« } \infty^0 \text{ » si } \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \\ \text{« } 0^0 \text{ » si } \lim\limits_{x\to a} f(x)=0^+ \text{ et } \lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \end{cases}$

Avec une forme indéterminée, tout est possible : il faut faire une étude spécifique pour chaque cas.

Proposition 7.2.6 (composition des limites)
On suppose que la fonction $g\circ f$ est définie au voisinage de a.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=\ell$.

7.2.2 Limites et inégalités

Proposition 7.2.7 (conservation des inégalités large par passage à la limite)
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell'$, avec ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si on a $f(x)\leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell\leqslant\ell'$.

- En particulier, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et si λ est un nombre réel :
  Si $f(x)\leqslant\lambda$ au voisinage de a, alors $\ell\leqslant\lambda$. Si $f(x)\geqslant\lambda$ au voisinage de a, alors $\ell\geqslant\lambda$.
- Si $f(x)<g(x)$ au voisinage de a, alors on peut seulement affirmer que $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to a} g(x)$.
  Ainsi, par passage à la limite, les inégalités strictes « deviennent » des inégalités larges.

Proposition 7.2.8
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell'$, avec a,ℓ,ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si $\ell<\ell'$, alors l'inégalité $f(x)<g(x)$ est vraie au voisinage de a.
En particulier, si λ est un nombre réel :
Si $\ell<\lambda$, alors $f(x)<\lambda$ au voisinage de a ; si $\ell>\lambda$, alors $f(x)>\lambda$ au voisinage de a.

On retrouve le « théorème des gendarmes » :

Proposition 7.2.9 (« passage à la limite par encadrement »)
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$, avec a et ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si on a l'encadrement $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell$.

Cas particuliers importants

– Si $|f(x)| \leqslant g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

– Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

– Supposons $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a : $\begin{cases} \text{si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty. \\ \text{si } \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty. \end{cases}$

7.2.3 Théorème de la limite monotone

Proposition 7.2.10 (limite aux bornes, pour une fonction monotone)
Soit f une fonction monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Alors la limite ℓ de f en a et la limite ℓ' de f en b existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Plus précisément, si f est croissante : on a $\ell = \inf\limits_{a<x<b} f(x)$ et $\ell' = \sup\limits_{a<x<b} f(x)$.
Et si f est décroissante, alors : $\ell = \sup\limits_{a<x<b} f(x)$ et $\ell' = \inf\limits_{a<x<b} f(x)$.

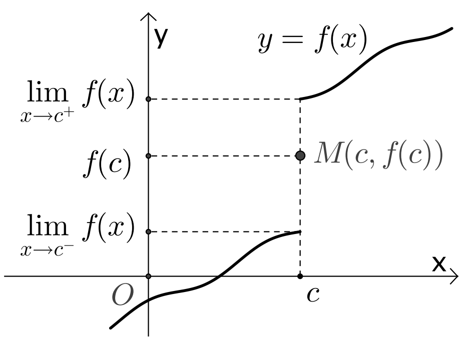
Les différents cas possibles

– Supposons f croissante : $\begin{cases} \text{si elle est majorée, } \ell' \text{ est un réel, sinon } \ell' = +\infty \\ \text{si elle est minorée, } \ell \text{ est un réel, sinon } \ell = -\infty \end{cases}$

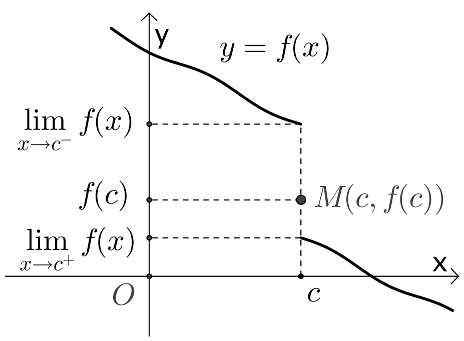
– Supposons f décroissante : $\begin{cases} \text{si elle est minorée, } \ell' \text{ est un réel, sinon } \ell' = -\infty \\ \text{si elle est majorée, } \ell \text{ est un réel, sinon } \ell = +\infty \end{cases}$

Proposition 7.2.11 (théorème de la limite monotone)
Soit f une fonction monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit c dans $]a, b[$.
La fonction f admet en c une limite à gauche et une limite à droite, toutes deux finies.
Si f est croissante, alors : $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.
Si f est décroissante, alors : $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \geqslant f(c) \geqslant \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.

Voici une illustration du résultat précédent, dans le cas (un peu rare tout de même) où les limites à gauche et à droite de f en c sont toutes deux distinctes de la valeur $f(c)$.



Limites à gauche et à droite en c
avec f croissante au voisinage de c



Limites à gauche et à droite en c
avec f décroissante au voisinage de c

7.3 Continuité

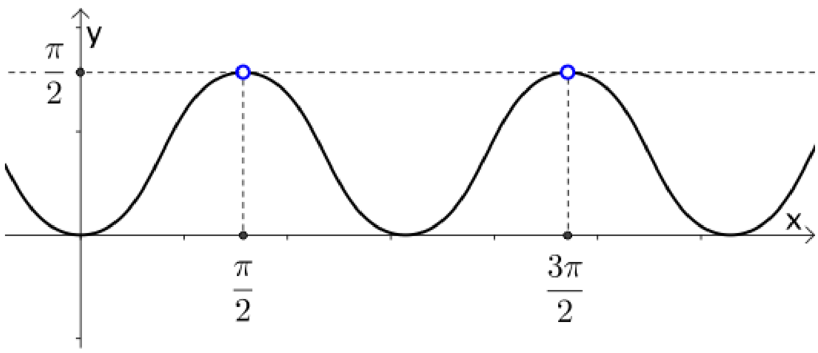
7.3.1 Continuité en un point

Dans toute la suite I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

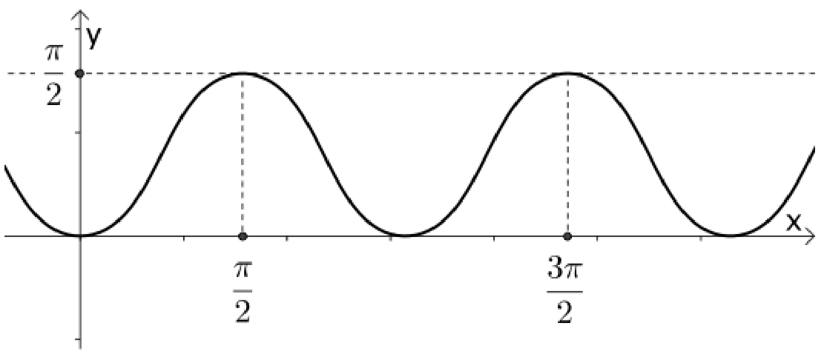
Définition 7.3.1 (définition de la continuité en un point)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, et soit a un élément de I.
On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a existe.
Puisque f est définie en a, cela équivaut à dire : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Donc f est continue en a si et seulement si : $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ (x \in I \text{ et } |x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$

Définition 7.3.2 (prolongement par continuité)
Soit I un intervalle d'intérieur non vide. Soit a un élément de I.
Soit f une fonction numérique réelle définie sur $I \setminus \{a\}$.
On dit que f est prolongeable par continuité en a si la limite $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est finie.
Si on pose $f(a) = \ell$, la fonction f ainsi prolongée devient continue en a.
On dit qu'on a effectué le *prolongement par continuité* de f au point a.

Exemple : on a représenté une partie de la courbe représentative de $f : x \mapsto \arctan(\tan^2(x))$.
Cette fonction est définie sauf aux $a_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, mais $\lim\limits_{x\to a_k^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a_k^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.



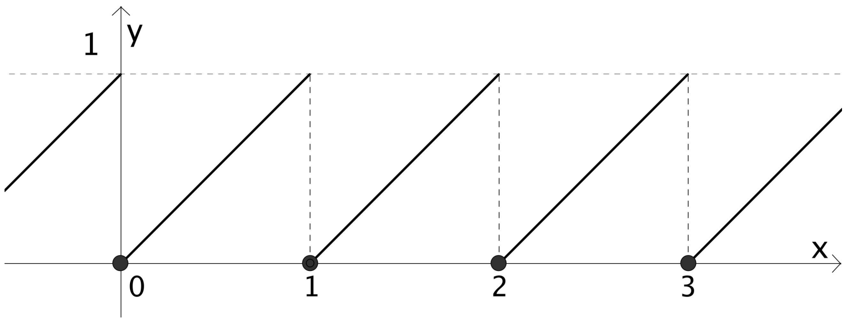
Si on pose $f\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{2}$, la fonction f devient continue en tout point de $\mathbb{R}$ (elle est π-périodique).



Définition 7.3.3 (continuité à gauche en un point)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit a un élément de I, qui n'en soit pas l'extrémité gauche.
Posons $J = I \cap]-\infty, a]$: l'intervalle J est d'intérieur non vide, et a est son extrémité droite.
Soit g la restriction de f à J. On dit que f est *continue à gauche* en a si g est continue en a.
Cela équivaut à $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ ou encore à : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (a - \delta \leqslant x \leqslant a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$

Définition 7.3.4 (continuité à droite en un point)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit a un élément de I, qui n'en soit pas l'extrémité droite.
Posons $J = I \cap [a, +\infty[$: l'intervalle J est d'intérieur non vide, et a est son extrémité gauche.
Soit g la restriction de f à J. On dit que f est *continue à droite* en a si g est continue en a.
Cela équivaut à : $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ ou encore : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (a \leqslant x \leqslant a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$

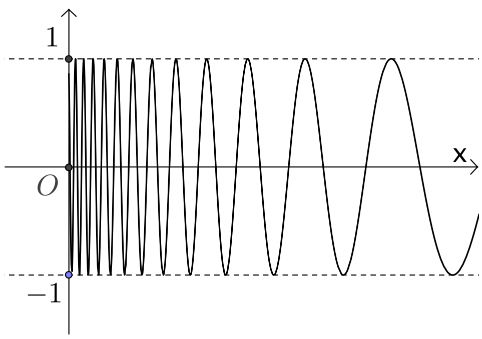
Soit a un point intérieur à l'intervalle I. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.
On a représenté ci-dessous la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.
En tout point de $\mathbb{Z}$, la fonction f est continue à droite mais pas à gauche.
Pour tout a de $\mathbb{Z}$, on a en effet : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0 = f(a)$.



Définition 7.3.5 (discontinuité de première espèce)
Soit f une fonction numérique réelle, définie sur l'intervalle I. Soit a un point de I.
Si f n'est pas continue en a, on dit que f est *discontinue* en ce point.
Si a est intérieur à I, si f est discontinue en a, mais si les limites à gauche et à droite en a existent et sont finies, on dit que f présente en a une *discontinuité de première espèce.*

Si f est discontinue en a, et si l'une au moins des deux limites (à gauche ou à droite) en a n'existe pas (ou est infinie), on dit que la discontinuité de f en a est de seconde espèce.

C'est le cas notamment de la discontinuité de la fonction $x \mapsto \cos(1/x)$ à l'origine (quelle que soit la valeur qu'on serait tenté de donner à $f(0)$).



7.3.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 7.3.1 (caractérisation séquentielle de la continuité en un point)
Soit f une fonction numérique réelle, définie sur l'intervalle I. Soit a un point de I.
La fonction f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de I convergeant vers a, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Le résultat précédent est utile pour montrer que f n'est pas continue en un point a : il suffit en effet de construire une suite (u_n) convergeant vers a, mais telle que la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

7.3.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 7.3.2 (combinaisons linéaires, produits, quotients)
Soit f et g deux fonctions numériques réelles, définies sur l'intervalle I. Soit a un élément de I.
On suppose que f et g sont continues en a.
Alors il en est de même pour $\alpha f + \beta g$ (avec α, β dans $\mathbb{R}$), pour fg, et (si $g(a) \neq 0$) pour $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$.

Proposition 7.3.3 (composition de fonctions continues en un point)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, avec $f(I) \subset J$.
Si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

7.4 Continuité sur un intervalle

7.4.1 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 7.4.1
Soit f une fonction numérique réelle, définie sur l'intervalle I.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I, à valeurs réelles.

Applications continues usuelles

- Les fonctions constantes, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$, sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynomiales) sont continues sur chaque intervalle de leur domaine de définition.
- Les fonctions usuelles $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$ sont continues sur chaque intervalle de leur domaine.

Proposition 7.4.1 (opérations entre fonctions continues sur un intervalle)
Soit f et g deux fonctions continues sur I.
Alors $\alpha f + \beta g$ (α, β dans $\mathbb{R}$), fg, $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur I.

Proposition 7.4.2 (compositions de fonctions continues sur un intervalle)
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ sont continues, avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Remarques

Pour démontrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I, on ne revient pratiquement jamais à la définition « epsilonesque ». Le plus souvent, la fonction à étudier est en effet un « cocktail » de fonctions continues usuelles et les propriétés précédentes permettent de conclure.

La continuité, même sur un intervalle, reste une *propriété locale*, ce qui signifie qu'elle n'est que le bilan de la continuité de f en chacun des points de I.

7.4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 7.4.3 (propriété des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I.
Soit a et b deux éléments de I, et soit β un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe un réel α, compris entre a et b, tel que $f(\alpha) = \beta$.

Proposition 7.4.4 (un énoncé équivalent au précédent)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe a et b dans I tels que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.
Alors il existe c dans I, compris entre a et b, tel que $f(c) = 0$.

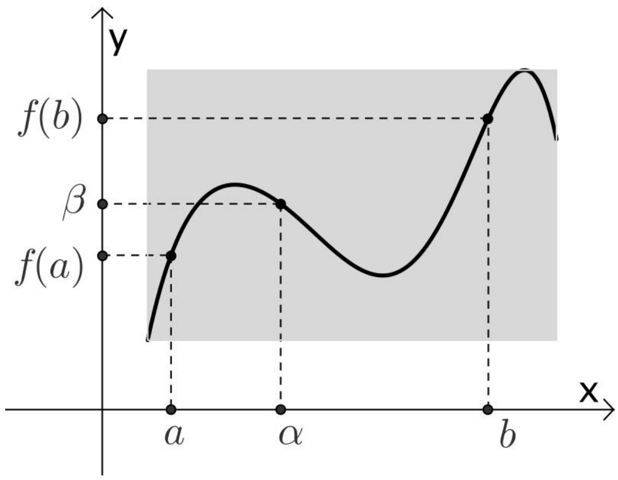
Proposition 7.4.5 (un énoncé équivalent aux deux précédents)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles. Alors $f(I)$ est un intervalle.

On représente ici une situation typique, la fonction f étant continue sur un intervalle I.

On a choisi deux abscisses a et b de I, et une ordonnée β comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

On a grisé le rectangle délimitant le graphe de f : sa projection sur Ox est l'intervalle I, et sa projection sur Oy est l'image $J = f(I)$.

On a marqué une abscisse α comprise entre a et b, telle que $f(\alpha) = \beta$ (en fait il y avait ici trois solutions α possibles, ce qui est manifestement une conséquence de la non monotonie de f).



7.4.3 Approximation d'un zéro par dichotomie

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) à valeurs réelles.

On suppose que $f(a)f(b) \leqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe α dans $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La méthode d'approximation de α par dichotomie consiste en les étapes suivantes :

– Initialisation : on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
– Soit n dans $\mathbb{N}$. On suppose a_n et b_n connus, avec $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$. On pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
  Si $f(a_n)f(c_n) \leqslant 0$, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$ sinon on pose $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$
– On définit ainsi deux suites adjacentes $(a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0}$.
  Ces deux suites convergent vers une solution α de l'équation $f(x) = 0$.
– Dans la pratique, on se donne $\varepsilon > 0$, et on s'arrête dès que $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \varepsilon$.
  On a alors obtenu un encadrement de α avec une erreur absolue majorée par ε.

On va écrire une fonction Python qui renvoie l'intervalle final de cette dichotomie.
Pour ε, on utilise une valeur par défaut : $\varepsilon = 10^{-8}$.

Voici le listing, et un exemple d'utilisation.
On obtient ainsi un encadrement de chacune des trois racines de $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

```
def dichotomie(f, a, b, eps=1e-8):
    while abs(b-a) > eps:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            b=c
        else:
            a=c
    return [a,b]
```

```
>>> def f(x): return x*x*x-2*x*x-x+1
>>> dichotomie(f, -1, 0)
[-0.8019377365708351, -0.8019377291202545]
>>> dichotomie(f, 0, 1)
[0.5549581274390221, 0.5549581348896027]
>>> dichotomie(f, 2, 3)
[2.2469796016812325, 2.246979609131813]
```

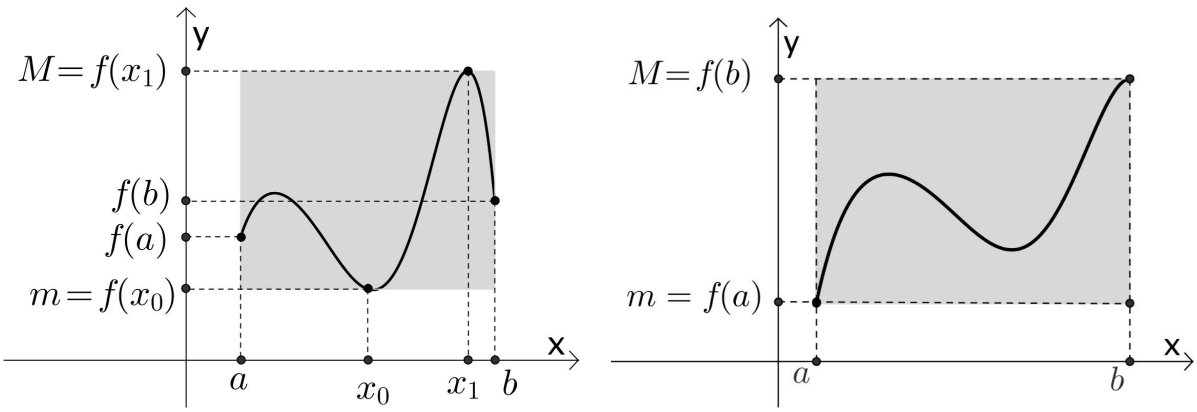
7.4.4 Application continue sur un segment

Les deux énoncés qui suivent sont équivalents :

Proposition 7.4.6 (présence d'un maximum et d'un minimum)
Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles.
Alors f est bornée sur $[a, b]$, et elle atteint ses bornes.
Il existe donc x_0 dans $[a, b]$ tel que $f(x_0) = \min\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$.
De même, il existe x_1 dans $[a, b]$ tel que $f(x_1) = \max\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$.

Proposition 7.4.7 (image d'un segment par une fonction continue)
Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles.
Alors $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$ de $\mathbb{R}$.

On a représenté ici deux situations typiques. La fonction choisie f n'est pas monotone sur $[a, b]$.
Les abscisses où f atteint ses bornes ne sont pas nécessairement les extrémités de $[a, b]$ (figure de gauche), même si ça reste possible (indépendamment de la non monotonie de f, voir figure de droite).



7.4.5 Continuité et stricte monotonie sur un intervalle

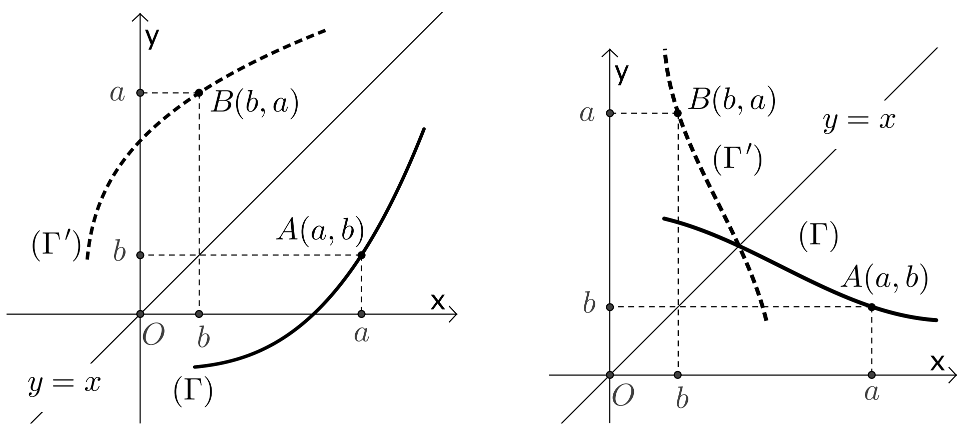
Proposition 7.4.8 (continuité et injectivité ⇒ stricte monotonie)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue et injective sur I. Alors f est strictement monotone sur I.

Proposition 7.4.9 (une condition suffisante de continuité sur un intervalle)
Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.
On suppose que $f(I)$ est un intervalle. Alors f est continue sur l'intervalle I.

Proposition 7.4.10 (théorème de la bijection réciproque)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.
La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone (de même monotonie que f).

Symétrie des courbes représentatives

Les courbes représentatives (Γ) de f et (Γ') de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$ (si le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$).
On a représenté ici deux situations possibles (le graphe (Γ') de f^{-1} est dessiné en traits pointillés). Dans le premier cas f et f^{-1} sont strictement croissantes. Dans le deuxième cas, elles sont strictement décroissantes (et on a fait figurer une valeur x telle que $f(x) = x$ donc telle que $f^{-1}(x) = x$: les deux graphes traversent alors simultanément la première bissectrice).



Unicité de la racine à une équation $f(x) = 0$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre *l'existence* d'une solution pour $f(x) = 0$.

Le théorème de la bijection réciproque assure *l'unicité* de cette solution.

Conservation des caractéristiques de l'intervalle

Si f est continue sur I, alors $J = f(I)$ n'a pas nécessairement les mêmes caractéristiques que I (caractère ouvert ou fermé, borné ou non borné).

En revanche, on sait que si I est un segment, alors $f(I)$ est un segment.

On peut ajouter que si f est strictement monotone, alors le caractère ouvert, semi-ouvert, ou fermé est conservé quand on passe de l'intervalle I à l'intervalle J.

Rappel : exemples de réciproques d'applications continues

– L'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  La bijection réciproque est $x \mapsto \ln(x)$.
– Pour tout α de $\mathbb{R}^{+*}$, les applications $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont deux bijections de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, réciproques l'une de l'autre.
– L'application $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin(x)$ (*arc sinus de x*).
– L'application $x \mapsto \cos(x)$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos(x)$ (*arc cosinus de x*).
– L'application $x \mapsto \tan(x)$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan(x)$ (*arc tangente de x*).

7.5 Cas des fonctions continues complexes

Soit f une fonction complexe $f : I \to \mathbb{C}$, définie sur l' intervalle I.

On sait que f est caractérisée par $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ telles : $\forall x \in I,\ f(x) = g(x) + ih(x)$.

Ces deux fonctions réelles sont notées $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}\ (f)$.

7.5.1 Limite d'une fonction à valeurs complexes

Voici les trois définitions qu'on peut donner pour exprimer qu'une fonction à valeurs complexes possède une limite en un point a (avec a réel), ou en $\pm\infty$.

Les trois définitions suivantes sont calquées sur celles qui ont été données pour des fonctions à valeurs réelles. La seule différence est que la distance $|f(x) - \ell|$ est mesurée dans $\mathbb{C}$, avec un module et non plus une valeur absolue.

Définition 7.5.1 (limite finie en un point a de $\mathbb{R}$)

Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Soit a un réel, élément ou extrémité de I. Soit ℓ un nombre complexe.

On dit que ℓ est limite de f en a si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in I \text{ et } |x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Définition 7.5.2 (limite finie en $+\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction complexe, où I est un intervalle non majoré. Soit ℓ un nombre complexe.
On dit que ℓ est limite de f en $+\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

Définition 7.5.3 (limite finie en $-\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe, où I est un intervalle non minoré. Soit ℓ un nombre complexe.
On dit que ℓ est limite de f en $-\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ (x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

Les définitions portant sur les fonctions réelles ne sont pas toutes transposables aux fonctions complexes.
Par exemple, si $f : I \to \mathbb{C}$, cela n'a aucun sens d'écrire que f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
De même, on ne peut plus parler de limite « par valeurs supérieure » (ou inférieure).
En revanche, on peut encore parler de la limite à gauche et de la limite à droite en a.

Proposition 7.5.1 (caractérisation en termes de partie réelle et partie imaginaire)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. Soit $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}\ (f)$.
Soit a un réel, élément ou extrémité de I.
Soit $\ell = u + iv$ un nombre complexe, avec u, v dans $\mathbb{R}$.
Alors on a l'équivalence : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \ \Leftrightarrow\ \Big(\lim\limits_{x\to a} g(x) = u \text{ et } \lim\limits_{x\to a} h(x) = v\Big)$
Dans ce cas, on peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) + i \lim\limits_{x\to a} h(x)$.

Le résultat précédent s'étend immédiatement à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, avec ℓ dans $\mathbb{C}$.

Résultats qui s'étendent aux limites de fonctions complexes

Un certain nombre de résultats concernant les limites de fonctions à valeurs réelles s'étendent sans difficulté au cas des fonctions à valeurs complexes. Citons entre autres :

- L'unicité de la limite (cf proposition 7.1.1)
- Le fait que si f est définie en a, sa seule limite possible en a est $f(a)$ (cf proposition 7.1.2)
- La caractérisation séquentielle des limites (cf proposition 7.1.5)
- Les opérations sur les limites (cf les propositions 7.2.2, 7.2.3, 7.2.6)

En revanche, on ne peut pas généraliser aux fonctions complexes les propriétés des limites réelles quand elles ont un rapport avec les inégalités et la monotonie (cf sous-sections 7.2.2 et 7.2.3)

7.5.2 Continuité en un point d'une fonction complexe

La définition suivante reprend mot pour mot celle qui a été donnée pour des fonctions à valeurs réelles. La seule différence est que la distance $|f(x) - f(a)|$ utilise maintenant le module dans $\mathbb{C}$.

Définition 7.5.4 (définition de la continuité d'une fonction complexe en un point)
Soient $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe, et soit a un élément de I.
On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a existe.
Puisque f est définie en a, cela équivaut à dire : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
Donc f est continue en a si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in I \text{ et } |x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$

On a immédiatement la caractérisation par la partie réelle et la partie imaginaire :

Proposition 7.5.2 (caractérisation en termes de partie réelle et partie imaginaire)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. Soit $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}\ (f)$.
Soit a un élément de I. Alors f est continue en a si et seulement si g et h sont continues en a.

Un certain nombre de résultats concernant la continuité de fonctions à valeurs réelles s'étendent sans difficulté au cas des fonctions à valeurs complexes. Citons entre autres :

– La définition de la continuité à gauche ou à droite (cf définitions 7.3.3 et 7.3.4).
– La caractérisation séquentielle de la continuité en un point (cf proposition 7.3.1)
– Les opérations sur les fonctions continues (cf propositions 7.3.2 et 7.3.3).

7.5.3 Continuité d'une fonction complexe sur un intervalle

Sans surprise, on a la définition suivante, puis une caractérisation avec les parties réelle et imaginaire.

Définition 7.5.5
Soit f une fonction numérique à valeurs complexes, définie sur l'intervalle I.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I, à valeurs complexes.

Proposition 7.5.3 (caractérisation en termes de partie réelle et partie imaginaire)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. Soit $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}\ (f)$.
Alors f est continue sur I si et seulement si g et h sont continues sur I.

Voici des résultats concernant la continuité sur un intervalle, et qui généralisent le cas des fonctions à valeur réelles au cas des fonctions à valeurs complexes :
– Opérations entre fonctions continues sur un intervalle (cf proposition 7.4.1).
– Compositions de fonctions continues sur un intervalle (cf proposition 7.4.2).
Si $f = I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ sont continues, avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

En revanche, on notera bien les différences suivantes.
Pour des fonctions continues à valeurs complexes :
– Il n'y a plus de théorème des valeurs intermédiaires.
Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{i\pi x}$.
Elle est continue sur $[0, 1]$, on a $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, mais f ne s'annule jamais (faire un dessin)
– Il n'y a plus de théorème de la bijection réciproque (tout simplement parce que parler de la monotonie de $f : I \to \mathbb{C}$ n'a pas de signification).

On notera tout de même le résultat suivant, dans le cas où f est continue sur un *segment* :

Proposition 7.5.4
Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, à valeurs complexes.
Alors f est bornée sur $[a, b]$, et son module atteint ses bornes.
Il existe donc x_0 dans $[a, b]$ tel que $|f(x_0)| = \min\{|f(x)|, a \leqslant x \leqslant b\}$.
De même, il existe x_1 dans $[a, b]$ tel que $|f(x_1)| = \max\{|f(x)|, a \leqslant x \leqslant b\}$.

Ce résultat signifie que l'arc $t \mapsto f(t) = u(t) + iv(t)$, avec $0 \leqslant t \leqslant b$ est tout entier compris dans la couronne circulaire définie par $m \leqslant |f(z)| \leqslant M$, où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de $|f|$.

Le fait que ces bornes soient atteintes signifie que l'arc représentant f rencontre les deux cercles qui délimitent cette couronne.

On a représenté ici l'arc défini par $f(t) = 2e^{it} + e^{-2it}$.

On a ici $\begin{cases} u(t) = \mathrm{Re}(f(t)) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ v(t) = \mathrm{Im}\ (f(t)) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$

Le mouvement de $f(t)$ est périodique de période 2π.

L'arc est ici tout entier inclus dans la couronne circulaire de centre 0 défini par $1 \leqslant |z| \leqslant 3$. Sur chaque période, il y a trois points de contact avec le cercle intérieur $|z| = 1$, et trois points de contact avec le cercle extérieur $|z| = 3$.