Chapitre 8

Dérivabilité

Sommaire

8.1 Nombre dérivé, fonction dérivée **192**
- 8.1.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé 192
- 8.1.2 Notion de développement limité d'ordre 1 193
- 8.1.3 Dérivabilité à gauche, à droite 194
- 8.1.4 Dérivabilité sur un intervalle 195
- 8.1.5 Opérations sur les fonctions dérivables 195
- 8.1.6 Approximation d'un zéro par la méthode de Newton 197

8.2 Rolle et accroissements finis **197**
- 8.2.1 Extremum local et point critique 197
- 8.2.2 Théorème de Rolle 198
- 8.2.3 Égalité des accroissements finis 199
- 8.2.4 Inégalité des accroissements finis 200
- 8.2.5 Dérivabilité et sens de variation 202
- 8.2.6 Théorème de la limite de la dérivée 203

8.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ **204**
- 8.3.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle 204
- 8.3.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ 204
- 8.3.3 Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement 205

8.4 Extension aux fonctions complexes **206**
- 8.4.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ 206
- 8.4.2 Extension des résultats 206

8.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

8.1.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé

Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions qui sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

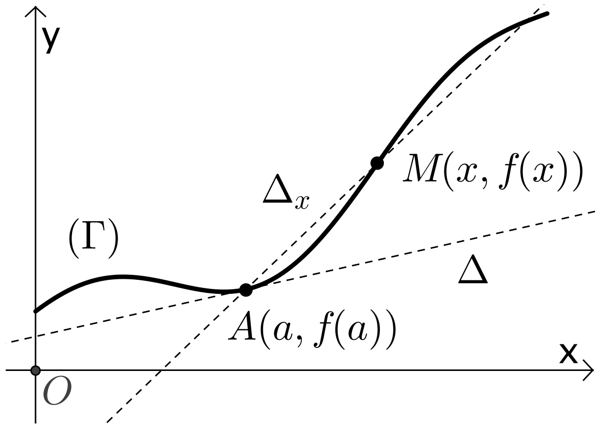
On se place au voisinage d'un point $A(a, f(a))$ de la courbe représentative (Γ) de f.

Soit $M(x, f(x))$ un point mobile sur (Γ), avec $x \neq a$.
Soit Δ_x la droite passant par A et M.

Le coefficient directeur de Δ_x est $\delta_x = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Quand x tend vers a (donc ici quand M se rapproche de A sur (Γ)), on examine si la droite Δ_x (qui pivote autour de A) possède une position limite Δ (c'est-à-dire si δ_x possède une valeur limite).

Si tel est le cas, on dit que la droite Δ est la tangente en A à la représentation graphique (Γ).



Définition 8.1.1 (nombre dérivé en un point)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique réelle. Soit a un élément de I.

On dit que f est *dérivable* en a si $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et est notée $f'(a)$, ou $D(f)(a)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Interprétation géométrique

Dire que f est dérivable en a, c'est dire que la courbe représentative (Γ) de f présente au point $A(a, f(a))$ une tangente Δ **non verticale**.
Par définition, le coefficient directeur de Δ est $f'(a)$.
L'équation de Δ est donc $y = f(a) + (x - a)f'(a)$.

Proposition 8.1.1 (une autre définition de la dérivabilité)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique réelle. Soit a un élément de I.

f est dérivable en a si et seulement si il existe :

– *un réel ℓ*

– *une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ de I dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\varepsilon(a) = 0$*

tels que : $\forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + (x - a)\ell + (x - a)\varepsilon(x)$

Au sens de la définition précédente, le réel ℓ est le nombre dérivé $f'(a)$.

Représentons la courbe (Γ) de f au voisinage de $A(a, f(a))$, et la tangente Δ (non verticale) en A.
Plaçons également deux points M_0 et M_1 sur (Γ) d'abscisses respectives x_0 et x_1.
On sait que l'équation de la tangente en A à (Γ) est : $y = f(a) + (x - a)f'(a)$.

Dans l'illustration ci-dessous, on a les coordonnées :

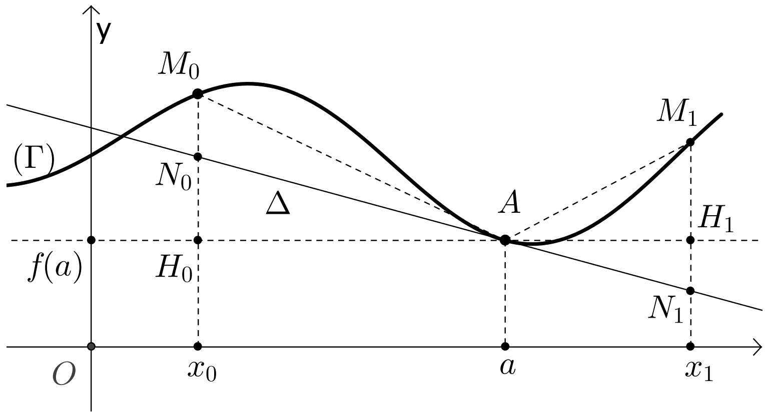
– d'une part : $H_0(x_0, f(a))$, $N_0(x_0, f(a) + (x_0 - a)f'(a))$ et $M_0(x_0, f(x_0)$.

– d'autre part : $H_1(x_1, f(a))$, $N_1(x_1, f(a) + (x_1 - a)f'(a))$ et $M_1(x_1, f(x_1)$.

Si on parle en termes de mesures algébriques sur un axe vertical (dirigé vers le haut), on a :

$\begin{cases} \overline{H_0N_0} = (x_0 - a)f'(a) \\ \overline{H_1N_1} = (x_1 - a)f'(a) \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{N_0M_0} = f(x_0) - f(a) - (x_0 - a)f'(a) \\ \overline{N_1M_1} = f(x_1) - f(a) - (x_1 - a)f'(a) \end{cases}$ et $\begin{cases} \overline{H_0M_0} = f(x_0) - f(a) \\ \overline{H_1M_1} = f(x_1) - f(a) \end{cases}$

Avec les notations de la proposition 8.1.1, on a donc $\begin{cases} \overline{N_0M_0} = (x_0 - a)\varepsilon(x_0) \\ \overline{N_1M_1} = (x_1 - a)\varepsilon(x_1) \end{cases}$



Ce que « dit » la dérivabilité de f en a, c'est qu'au voisinage « immédiat » de A une mesure algébrique comme $\overline{N_0M_0}$ est « négligeable » devant $\overline{H_0N_0}$ (ça ne saute pas aux yeux sur l'illustration car on s'est placé finalement très loin de a).

En termes imagés, la dérivabilité de f en a nous dit que la différence $f(x) - f(a)$ (donc l'accroissement de f entre a et x) est approché par $f'(a)(x - a)$ (donc proportionnellement à l'accroissement $x - a$ de la variable), avec un terme d'erreur qui est lui-même négligeable devant $x - a$.

En termes plus géométriques (mais pas très précis) la tangente Δ à (Γ) en $A(a, f(a))$ est une « bonne approximation » de la courbe au voisinage de A.

Proposition 8.1.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, et soit a un point de I.

Si f est dérivable a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse : penser à $x \mapsto |x|$ en 0.

8.1.2 Notion de développement limité d'ordre 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, et soit a un point de I.

Si f est dérivable a alors : $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Réciproquement, on suppose que a est une extrémité de l'intervalle de définition de f.

On suppose également qu'on peut écrire $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

On trouve $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda_0$, ce qui prouve que f est prolongeable par continuité en a, en posant $f(a) = \lambda_0$.

On trouve ensuite $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lambda_1+\varepsilon(x)$, donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lambda_1$.
Cela prouve que f est dérivable en a, avec $f'(a)=\lambda_1$.
On peut donc énoncer le résultat suivant, qui sera amélioré ultérieurement :

Proposition 8.1.3
Soit f une fonction numérique, définie sur $I\setminus\{a\}$.
On suppose que f possède un « développement limité d'ordre 1 en a ».
Autrement dit, on suppose qu'on peut écrire : $f(x)=\lambda_0+\lambda_1(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.
Alors f est prolongeable de façon dérivable en a, en posant $f(a)=\lambda_0$ et $f'(a)=\lambda_1$.

Variante de notation

Le développement limité $f(x)=\lambda_0+\lambda_1(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)$ s'écrit : $f(x)=\lambda_0+\lambda_1(x-a)+\mathrm{o}(x-a)$.
Dans cette écriture, $\mathrm{o}(x-a)$ est une notation générique désignant toute fonction « négligeable devant » $x-a$ quand x tend vers a, c'est-à-dire qui s'écrit $(x-a)\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

Le changement de variable $x=a+h$ permet de se ramener à une étude quand h tend vers 0.

On écrira donc $f(a+h)=\lambda_0+\lambda_1 h+\mathrm{o}(h)$ pour exprimer le développement limité d'ordre 1 de f en a.

8.1.3 Dérivabilité à gauche, à droite

On complète les définitions précédentes avec la notion de nombre dérivé à gauche ou à droite.

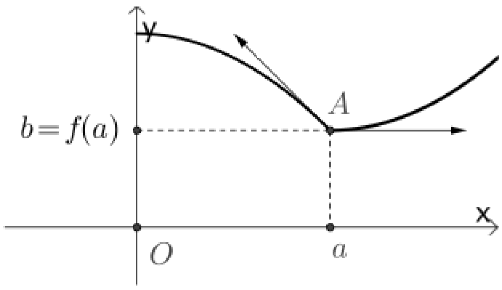
Définition 8.1.2 (nombre dérivé à gauche)
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction numérique, et soit a un point de I (distinct de l'extrémité gauche de I).
On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.
Cette limite est appelée *nombre dérivé à gauche* de f en a, et est notée $f'_g(a)$.

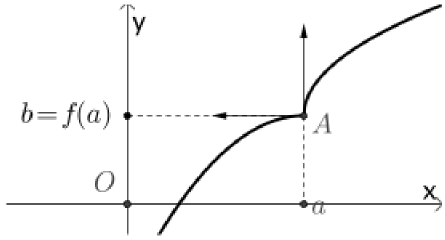
Définition 8.1.3 (nombre dérivé à droite)
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction numérique, et soit a un point de I (distinct de l'extrémité droite de I)
On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.
Cette limite est appelée *nombre dérivé à droite* de f en a, et est notée $f'_d(a)$.

Interprétation géométrique

Dire que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, c'est dire que la courbe (Γ) de f admet au point $A(a,f(a))$ une demi-tangente à droite (resp. à gauche) **non verticale**.
Le coefficient directeur de cette demi-tangente est $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Sur l'exemple de gauche, f est dérivable à gauche et à droite en a, avec $f'_g(a)=-1$ (demi-tangente oblique, parallèle à $y=-x$) et $f'_d(a)=0$ (demi-tangente horizontale.)
Sur l'exemple de droite, on a $f'_g(a)=0$ (demi-tangente horizontale), mais f n'est pas dérivable à droite en a (il y a bien une demi-tangente mais elle est verticale).





Remarques :

— Soit a un point de I qui n'est pas une extrémité de I.

Alors f est dérivable en a si seulement si $\begin{cases} \text{elle est dérivable à gauche et à droite en } a \\ \text{on a l'égalité } f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$
On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

— Si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, elle y est continue à gauche (resp. à droite).

8.1.4 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 8.1.4 (fonctions dérivables, ou de classe $\mathcal{C}^1$, sur I)
On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I.
La fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à tout a associe $f'(a)$ est appelée *fonction dérivée* de f.
Cette fonction est également notée $\mathrm{D}(f)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
Si de plus f' est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque : on se souviendra que la dérivabilité (même étendue à un intervalle) reste une *notion locale* : la dérivabilité de f sur I, ça n'est que la dérivabilité de f en chacun des points de I.

8.1.5 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 8.1.4 (linéarité de la dérivation en un point)
Soient f et g deux fonctions dérivables au point a.
Pour tous scalaires α, β, la fonction $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable en a, et $h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

Proposition 8.1.5 (produit de fonctions dérivables en un point)
Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a.
Alors la fonction $h = fg$ est dérivable en a, et $h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Proposition 8.1.6 (dérivée de l'inverse)
Si g est dérivable en a, avec $g(a) \neq 0$, alors $h = \dfrac{1}{g}$ est dérivable en a, et $h'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$.
Supposons en outre que f soit dérivable en a.
Alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable au point a, et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Proposition 8.1.7 (composition et dérivation)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable en a. Soit $g : J \to \mathbb{R}$, dérivable en $b = f(a)$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a)$.

Remarque : dans la proposition précédente, il faut supposer que $g \circ f$ est définie au voisinage de a (par exemple, si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est définie sur I).

Proposition 8.1.8 (dérivation et bijection réciproque)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, strictement monotone.
f est donc bijective de I sur un intervalle J. Soit a dans I tel que $f'(a) \neq 0$.
Alors $g = f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ et $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$.

Généralisation aux fonctions dérivables sur un intervalle

Les propriétés précédentes se généralisent à la dérivabilité sur un intervalle. On peut même d'ailleurs énoncer les mêmes résultats en remplaçant « dérivable » par « de classe $\mathcal{C}^1$ »).

- Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle I.
  Alors la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ et le produit fg sont dérivables sur I et $\begin{cases} h' = \alpha f' + \beta g' \\ (fg)' = f'g + fg' \end{cases}$
  Si g ne s'annule pas sur I, alors $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$, et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, avec $f(I) \subset J$.
  Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, strictement monotone.
  La fonction f réalise donc une bijection de I sur un intervalle J.
  Si f' ne s'annule pas sur I, alors $g = f^{-1}$ est dérivable sur J et $g' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Cas usuels de dérivation composée

La dérivée de la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha\, x^{\alpha-1}$ (c'est vrai sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tous les α ; c'est prolongeable en 0 si $\alpha > 1$; c'est prolongeable sur $\mathbb{R}^{-*}$ pour les exposants entiers).
Dans les égalités suivantes, f est dérivable, et on suppose qu'on a réglé les problèmes de définition.

$(f^\alpha)' = \alpha\, f'\, f^{\alpha-1}$ (α constant !), $\quad \left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$, $\quad \left(\ln|f|\right)' = \dfrac{f'}{f}$, $\quad \left(\mathrm{e}^f\right)' = f'\,\mathrm{e}^f$

Si f, g sont dérivables : $\left(f^g\right)' = \left(e^{g\ln(f)}\right)' = \left(g\ln(f)\right)' f^g = \left(g'\ln(f) + \dfrac{gf'}{f}\right) f^g = g'\ln(f) f^g + g f' f^{g-1}$

Rappel sur la dérivation des fonctions trigonométriques inverses

La dérivée de $x \to \sin x$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est $x \to \cos x$, nulle en $\pm\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit :

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[,\ \arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La dérivée de $x \to \cos x$ sur $[0, \pi]$ est $x \to -\sin x$, nulle en $x = 0$ et $x = \pi$. On en déduit :

$$\forall\, x \in]-1, 1[,\ \arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On rappelle que les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto \arccos x$ présentent une demi-tangente verticale aux points d'abscisse -1 et 1, ce qui résulte du théorème de la limite de la dérivée (voir en 8.2.6).

La dérivée de $x \to \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est $x \to 1 + \tan^2 x$, toujours non nulle. On en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

8.1.6 Approximation d'un zéro par la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.

On suppose que f' ne s'annule pas, mais que f s'annule en un point α de I.

La méthode d'approximation de α par la « méthode de Newton », consiste en les étapes suivantes :

- Initialisation : on part d'une valeur x_0 (plutôt proche de α).
- Si x_n est connu dans I, on mène la tangente Δ_n au point d'abscisse x_n de la courbe de f.
  La droite Δ_n, d'équation $y = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n)$, recoupe Ox au point d'abscisse $x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
  Si cette abscisse est dans I, on la nomme x_{n+1} et on continue à partir de x_{n+1}.
- Dans la pratique, on se donne $\varepsilon > 0$, et on s'arrête dès que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$.

Voici une fonction Python `newton(f,x0,eps,h)`, avec $\varepsilon = 10^{-8}$ par défaut.

On note h un « petit réel positif » (par défaut $h = 10^{-3}$) qui approche $f'(x)$ par $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

On a ajouté un exemple d'utilisation.

On obtient ici une valeur approchée des trois racines de $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

```
def newton(f,x0,eps=1e-8,h=1e-3):
    (xn, xn1) = (x0, x0+2*eps)
    while abs(xn1-xn) > eps:
        xn = xn1
        d = (f(xn+h)-f(xn))/h
        xn1 = xn - f(xn)/d
    return xn
```

```
>>> def f(x): return x*x*x-2*x*x-x+1
>>> newton(f,-0.8)
-0.801937729356303
>>> newton(f,0.5)
0.5549581324591675
>>> newton(f,2)
2.2469796051199724
```

8.2 Rolle et accroissements finis

8.2.1 Extremum local et point critique

Définition 8.2.1 (extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur l'intervalle I. Soit a un élément de I.

On dit que f présente un *maximum local* en a si : $\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in I,\ (|x - a| \leqslant \varepsilon \Rightarrow f(x) \leqslant f(a))$

On dit que f présente un *minimum local* en a si : $\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in I,\ (|x - a| \leqslant \varepsilon \Rightarrow f(x) \geqslant f(a))$

On dit que f présente un *extremum local* en a si f présente un maximum ou un minimum local en a.

Si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout x de I, on dit que f présente un *maximum absolu* en a.
On définit de même la notion de *minimum absolu* et d'*extremum absolu*.

Définition 8.2.2 (point critique d'une fonction dérivable)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit a un élément de I.
On dit que a est un *point critique* de f si la dérivée de f est nulle en a.

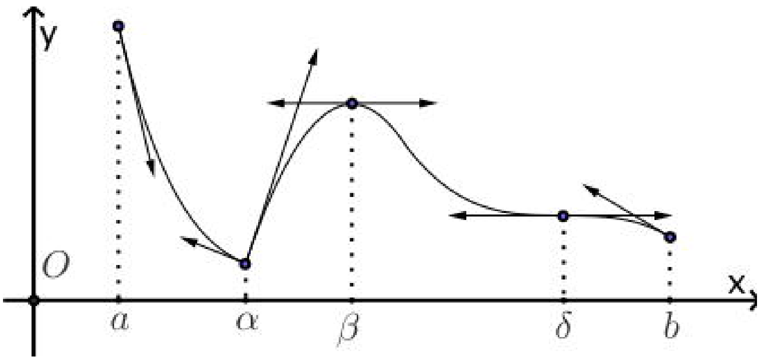
Proposition 8.2.1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit a un point intérieur à I.
Si f possède un extrémum local en a, alors $f'(a) = 0$ (a est donc un point critique de f).

Remarques :

La réciproque est fausse : un point critique n'est pas nécessairement le signe d'un extremum relatif.
Par exemple, avec $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais f n'a pas d'extrémum en 0.

En fait, les extrémums locaux de f sur I sont à chercher parmi les points où f n'est pas dérivable, parmi les extrémités de I, et parmi les points critiques intérieurs à I. Le graphe ci-dessous illustre quelques cas possibles. On y voit une fonction définie sur le segment $[a, b]$, avec les propriétés suivantes :

– en a, la dérivée n'est pas nulle, mais f présente en ce point un maximum absolu.
– en α, il y a un minimum absolu, et en ce point f n'est pas dérivable.
– on voit que β est un point critique, et que ça correspond à un maximum relatif.
– on voit que δ est un point critique, mais ça ne correspond à aucun extremum relatif.
– en b, la dérivée n'est pas nulle, mais f présente en ce point un minimum relatif.

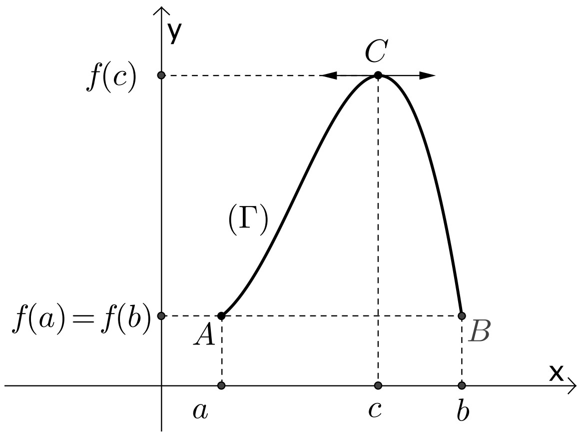


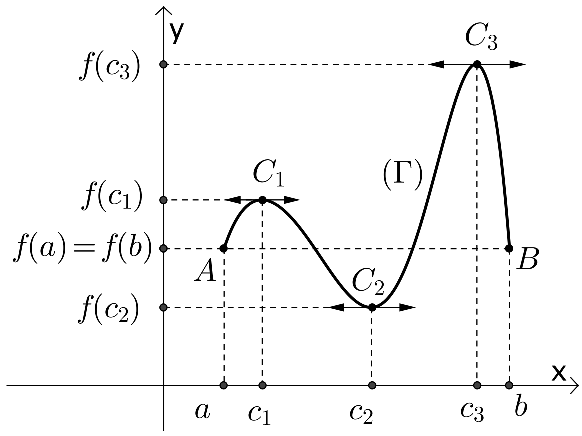
8.2.2 Théorème de Rolle

Proposition 8.2.2 (Théorème de Rolle)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique
Soit (Γ) la courbe de f. Soit A, B les points d'abscisse a, b de (Γ). Avec les hypothèses du théorème de Rolle, il y a un point C de (Γ), distinct de A et B, en lequel la tangente à (Γ) est horizontale.

Comme on le voit sur l'illustration ci-dessous (à droite), il est possible qu'il existe plusieurs points strictement compris entre A et B et en lesquels la tangente à (Γ) est horizontale (donc plusieurs valeurs de c dans $]a,b[$ pour lesquelles $f'(c)=0$).





Remarques

– Les hypothèses du théorème de Rolle sont extrêmement importantes (continuité sur le segment, dérivabilité à l'intérieur du segment, valeurs identiques aux extrémités).

  Si l'une de ces hypothèses disparaît, alors le résultat ne tient plus (trouver des contre-exemples !).

  Quand on utilise le théorème de Rolle, il faut le citer avec les hypothèses ci-dessus (et qui sont minimales), même si dans la pratique les propriétés de f sont souvent plus « confortables ».

– Le théorème de Rolle est souvent utilisé de manière répétée.

  Supposons par exemple que f soit deux fois dérivable sur un intervalle I, et qu'il existe trois points $a<b<c$ de I tels que $f(a)=f(b)=f(c)$.

  Avec « Rolle » sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, il existe α dans $]a,b[$ et β dans $]b,c[$ tels que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$.

  En appliquant Rolle à f' sur $[\alpha,\beta]$, on en déduit qu'il existe γ dans $]\alpha,\beta[$ tel que $f''(\gamma)=0$.

  Plus généralement, si f est n fois dérivable sur I, et si elle s'annule en $n+1$ points distincts, on montre (par une application répétée du théorème de Rolle) qu'il existe un élément c de I en lequel la fonction dérivée n-ième $f^{(n)}$ s'annule.

8.2.3 Égalité des accroissements finis

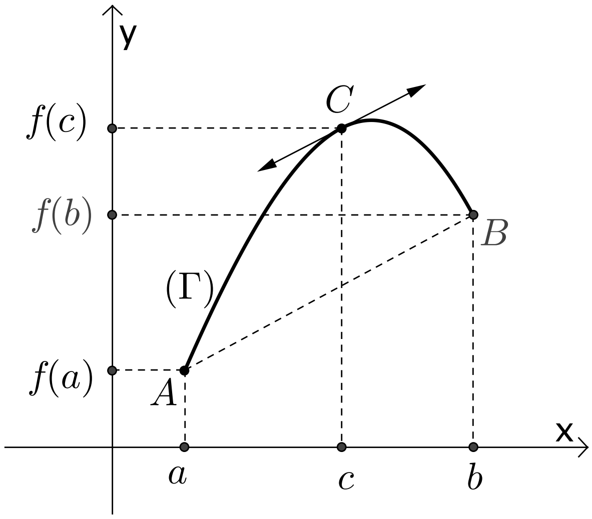
Proposition 8.2.3 (égalité des accroissements finis)
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur le segment $[a,b]$, avec $a<b$, à valeurs réelles.
On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$, c'est-à-dire : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

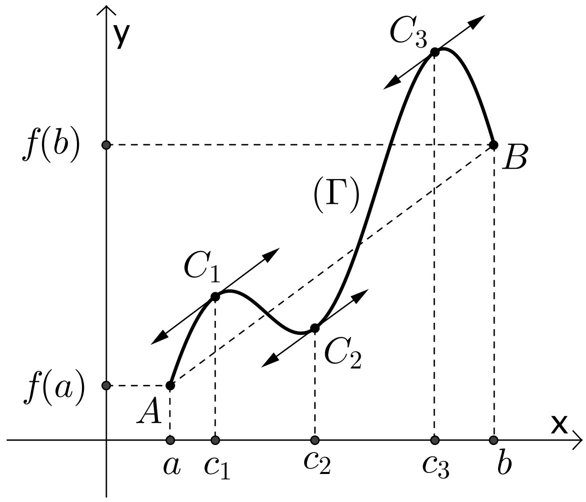
Interprétation géométrique

Soit (Γ) la courbe de f. Soit A,B les points d'abscisse a,b de (Γ).

Avec les hypothèses de l'égalité des accroissements finis, il y a un point (C) de (Γ), disctint de A et B, en lequel la tangente à (Γ) est parallèle à la corde (AB).

Comme on le voit sur l'illustration ci-dessous (à droite), il est possible qu'il existe plusieurs points strictement compris entre A et B et en lesquels la tangente à (Γ) est est parallèle à la corde (AB) (donc plusieurs valeurs de c dans $]a, b[$ pour lesquelles $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$).





Remarques

– Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$.
  On suppose que : $\forall\, x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.
– L'égalité $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ est invariante par échange de a et b. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer $a < b$. Il suffit d'indiquer que c est strictement compris entre a et b.
– Interprétation cinématique : si un point mobile se déplace sur une droite, pendant un intervalle de temps $a \leqslant t \leqslant b$, avec une vitesse variable $v(t)$, alors il existe au moins un instant t_0 en lequel sa vitesse instantanée est exactement égale à sa vitesse moyenne sur tout l'intervalle de temps.

L'égalité des accroissements finis est souvent écrite de la manière suivante :

Proposition 8.2.4 (une autre version de l'égalité des accroissements finis)
Soit f une fonction continue sur $[a, a + h]$ et dérivable sur $]a, a + h[$
Alors il existe θ dans $]0, 1[$ tel que : $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$.

Dans la version précédente de l'égalité des accroissements finis, le signe de h est quelconque.
On peut donc reformuler le résultat de la façon suivante :

Proposition 8.2.5 (une version locale de l'égalité des accroissements finis)
Soit f une fonction dérivable au voisinage de a (sur un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$, avec $\delta > 0$).
Alors, pour tout h vérifiant $|h| < \delta$, il existe θ dans $]0, 1[$ tel que : $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$.

Remarque : dans les deux énoncés précédents, θ dépend de h (le mieux serait donc de le noter θ_h).

8.2.4 Inégalité des accroissements finis

Définition 8.2.3 (fonction lipschitzienne)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle I. Soit K un réel strictement positif.
On dit que f est K-lipschitzienne sur I si : $\forall\, (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant K\, |y - x|$.

Remarques

– Si f est lipschitzienne sur l'intervalle I, elle est continue sur cet intervalle.
  La réciproque est fausse comme on le voit avec $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

– Le caractère lipschitzien est une propriété globale, alors que la continuité est une notion locale. Cela n'a donc aucun sens de parler de fonction lipschitzienne en un point.

– Quand une fonction est K-lipschitzienne, avec $K < 1$, on dit qu'elle est *contractante*.

Le résultat ci-dessous est appelé « inégalité des accroissement finis ».
Il constitue une condition suffisante pour qu'une fonction soit lipschitzienne sur un intervalle.

Proposition 8.2.6 (inégalité des accroissement finis)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $|f'(x)| \leqslant K$ pour tout x de I.
Alors la fonction f est K-lipschitzienne sur I.
Autrement dit, pour tous x, y de I, on a : $|f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y - x|$.

Une situation usuelle où les hypothèses précédentes sont réalisées est : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
En effet f' est alors continue donc bornée sur $[a,b]$, et on peut utiliser $K = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Utilisation pour les suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

On se donne une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit ℓ un point fixe de f (c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$, donc ℓ est une limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$).

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I contenant ℓ.
On suppose également que $|f'(\ell)| < 1$.
Par continuité, il existe un segment J contenant ℓ et sur lequel on a $|f'(x)| \leqslant K < 1$.
On en déduit que f est K-lipschitzienne (donc *contractante*) sur le segment J.

Supposons que le terme initial u_0 soit dans le segment J.
Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, le terme u_n est encore dans J (le segment J est donc *stable* par f).
Cela résulte d'une récurrence facile et de : $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant K\,|u_n - \ell| \leqslant |u_n - \ell|$.
Toujours par récurrence évidente, on trouve $|u_n - \ell| \leqslant K^n\,|u_0 - \ell|$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Il en résulte $\lim u_n = \ell$.

On exprime cette situation (le fait que $|f'(\ell)| < 1$) en disant que ℓ est un point fixe *attractif* de f.
On constate que la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est d'autant plus rapide que K peut être choisi proche de 0 (et donc que $|f'(\ell)|$ est lui-même proche de 0, c'est-à-dire que la tangente au point fixe est proche de l'horizontale).

Remarque (cas d'un point fixe *répulsif*)
Supposons $|f'(\ell)| > 1$, les autres hypothèses étant inchangées : $f(I) \subset I$, f est $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f(\ell) = \ell$.

On dit alors que ℓ est un point fixe *répulsif* de f. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne peut alors pas converger vers ℓ (sauf s'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} = \ell$, car alors la suite *stationne* en ℓ).

Pour ces questions, on se reportera au contenu de la section 6.6.5

8.2.5 Dérivabilité et sens de variation

Dans les propositions suivantes, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

Pour assurer des résultats de monotonie de f sur l'intervalle I (donc y compris aux extrémités) il suffit de vérifier des hypothèses sur la dérivée de f à l'intérieur de I.

Pour que la monotonie reste vraie « extrémités incluses » on utilise la continuité de f en ces extrémités.

On note $\mathring{I}$ « l'intérieur » de I, c'est-à-dire I privé de ses extrémités éventuelles.

Proposition 8.2.7 (caractérisation des fonctions constantes)
Toute fonction constante f de I dans $\mathbb{R}$ est dérivable sur I et : $\forall\, x \in I,\ f'(x) = 0$.
Réciproquement, soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I.
Si on a $f'(x) = 0$ pour tout x de $\mathring{I}$, alors f est constante sur I.

Proposition 8.2.8 (caractérisation des fonctions monotones)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I.
– *la fonction f est croissante sur I si et seulement si :* $\forall\, x \in \mathring{I},\ f'(x) \geqslant 0$.
– *la fonction f est décroissante sur I si et seulement si :* $\forall\, x \in \mathring{I},\ f'(x) \leqslant 0$.

Proposition 8.2.9 (caractérisation des fonctions strictement monotones)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I.
La fonction f est strictement monotone sur I si et seulement si sa dérivée f' garde un signe constant sur $\mathring{I}$, ne s'annulant sur aucun sous-intervalle de $\mathring{I}$ d'intérieur non vide (c'est-à-dire ne s'annulant éventuellement qu'en des points isolés de $\mathring{I}$).

Exemple : la fonction $f : x \mapsto x - \sin(x)$ a pour dérivée $f'(x) = 1 - \cos(x)$. Cette dérivée reste positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule qu'aux points isolés $x_k = 2k\pi$ (avec k dans $\mathbb{Z}$). La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 8.2.10 (fonctions ayant la même dérivée)
Soit f et g deux fonctions continues sur I, dérivables sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I.
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
– *pour tout x de I, on a $f'(x) = g'(x)$.*
– *il existe une constante λ telle que :* $\forall x \in I,\ g(x) = f(x) + \lambda$.

Remarques

Les résultats précédents découlent du théorème de Rolle.

Comme lui, il ne sont valables que sur un intervalle, et pas sur une réunion d'intervalles.

Par exemple, si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, mais f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$.

De même, si deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ vérifient $f' = g'$ sur $\mathbb{R}^*$, alors elles diffèrent d'une constante λ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et d'une constante μ (a priori sans rapport avec λ) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

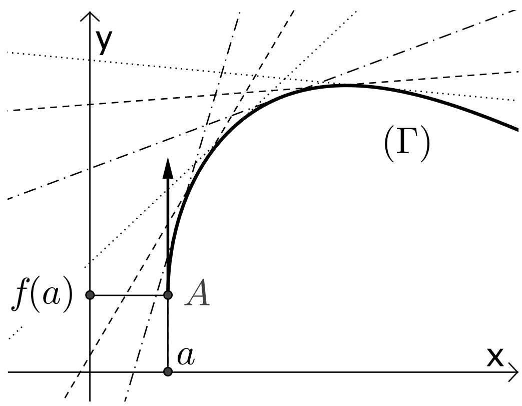
8.2.6 Théorème de la limite de la dérivée

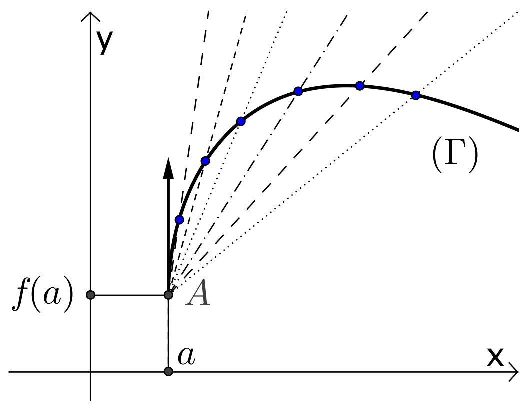
Proposition 8.2.11 (théorème de la limite de la dérivée)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a un point de I.
On suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$, avec ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Alors, sous ces hypothèses, on a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

Cas particuliers et interprétations géométriques

Avec les notations de la proposition précédente :

- Si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$, la courbe représentative de f présente en $A(a, f(a))$ une tangente verticale.
  C'est le cas notamment pour $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto \arccos x$ en $x = -1$ et en $x = 1$.
- Si ℓ est réel, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Ainsi prolongée, f' est continue en a.
  En particulier, si on suppose la continuité de f' sur $I \setminus \{a\}$, la fonction f est maintenant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tout entier (on peut alors parler de « théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement »).
- Le résultat précédent permet d'affirmer la dérivabilité d'une fonction en un « point à problème ».
  Par rapport à la méthode traditionnelle (limite du taux d'accroissement entre $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ quand x tend vers a, donc position limite de la corde (AM)), on utilise ici la limite de $f'(x)$ quand x tend vers a (donc la position limite de la tangente en M « quand M tend vers A »).
  Les calculs sont souvent plus compliqués avec $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$, mais on y gagne la continuité de f' en a.
- On illustre ici le cas d'une tangente verticale en $A(a, f(a))$: à gauche avec le théorème de la limite de la dérivée ($\lim\limits_{x \to a} f'(x) = +\infty$) et à droite avec la position limite des cordes.





Un contre-exemple utile

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et par $f(0) = 0$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (théorèmes généraux) et en 0 (inégalité $|f(x)| \leqslant x^2$).

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$: sa dérivée est alors $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour $x \neq 0$, on a $\left|\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \left|x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

En revanche, la limite de $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'existe pas quand x tend vers 0.

8.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

8.3.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle

On rappelle que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition 8.3.1 (fonctions k fois dérivables sur un intervalle)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique réelle définie sur l'intervalle I. On pose $f^{(0)} = f$.
Si la fonction $f^{(k)}$, avec k dans $\mathbb{N}$, est définie et dérivable sur I, on pose $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.
Si $f^{(k)}$ est définie sur I, on dit que f est k fois dérivable sur I.
La fonction $f^{(k)}$ est appelée *dérivée k-ième* de f sur I. On peut la noter $\mathrm{D}^k(f)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\, x^k}$.

Évidemment, on note souvent f'' et f''', plutôt que $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$, les dérivées seconde et troisième de f.
Évidemment toujours, on ne confondra jamais les notations $f^{(k)}$ et f^k.

Définition 8.3.2 (fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique réelle définie sur l'intervalle I. Soit k un entier naturel.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est k fois dérivable, et si $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^k$ sur I.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I.
On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$ (avec k dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

Remarques :

- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, avec $k \geqslant 1$, toutes les fonctions dérivées j-ièmes, avec $0 \leqslant j < k$ sont évidemment continues sur I puisqu'elles y sont (au moins une fois) dérivables.
- On dit souvent d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ qu'elle est « k fois continûment dérivable ».
- Dire que f est de classe $\mathcal{C}^0$, c'est dire que f est continue.
  Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a bien sûr $\mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. Par ailleurs $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.
- On dit parfois « f est $\mathcal{C}^k$ sur I » plutôt que « f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ».
- On a $f^{(k)} \equiv 0$ sur I si seulement si f est une fonction polynomiale, avec $\deg(f) < k$.

8.3.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Dans les énoncés suivants, k est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 8.3.1 (combinaisons linéaires de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$. Soit α, β deux réels.
Alors $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$.

Proposition 8.3.2 (formule de Leibniz)
Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.
Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a : $(fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$.

Proposition 8.3.3 (inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$)
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Proposition 8.3.4 (composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et $g : J \to \mathbb{R}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^k$, avec $f(I) \subset J$.
Alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

Proposition 8.3.5 (bijection réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $f'(x) > 0$ pour tout x de I, ou que $f'(x) < 0$ pour tout x de I.
La fonction f réalise donc une bijection de I sur un intervalle J.
Dans ces condtions, la bijection réciproque f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

- Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  Il en est de même des fonctions rationnelles (sur leur domaine de définition).
- Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto \ln x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  Les fonctions $x \mapsto \exp x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$, $x \mapsto \operatorname{sh} x$ et $x \mapsto \operatorname{th} x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  La fonction $x \mapsto \tan x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine. La fonction $x \mapsto \arctan x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  Les fonctions $x \mapsto \arcsin x$, et $x \mapsto \arccos x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
- Les fonctions qui se déduisent des précédentes par somme, produit, quotient, puissance et composition sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

8.3.3 Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement

Proposition 8.3.6
Soit I un intervalle d'intérieur non vide, et soit a un élément de I.
Soit k un entier naturel. On se donne une fonction f, définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$.
On suppose que, pour tout j de $\{0, \ldots, k\}$, la limite $\ell_j = \lim\limits_{x \to a} f^{(j)}(x)$ existe et est finie.
En particulier, on peut prolonger f en a, par continuité, en posant $f(a) = \ell_0$.
Ainsi prolongée, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $\forall j \in \{0, \ldots, k\},\ f^{(j)}(a) = \ell_j$.

Le résultat précédent s'étend à $k = +\infty$, en remplaçant « $\forall j \in \{0, \ldots, k\}$ » par « $\forall j \in \mathbb{N}$ ».
Le cas de la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \exp\Big(-\dfrac{1}{x}\Big)$ est classique.
Il est clair en effet que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (opérations entre fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$).
On montre par récurrence que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} \exp\Big(-\dfrac{1}{x}\Big)$, où P_n est un polynôme tel que $P_n(0) = 1$.
On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{2n}} \exp\Big(-\dfrac{1}{x}\Big) = \lim\limits_{X \to +\infty} X^{2n} \exp(-X) = 0$.
Ainsi la fonction f, prolongée par $f(0) = 0$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

8.4 Extension aux fonctions complexes

8.4.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 8.4.1 (fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs complexes)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Soit $u = \text{Re}(f)$ et $v = \text{Im }(f)$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
On note alors $f^{(k)} = u^{(k)} + iv^{(k)}$ et on dit que $f^{(k)}$ est la fonction dérivée k-ième de f.

Important : s'il est possible de considérer des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, on ne parlera **jamais** de la dérivée d'une fonction qui serait définie sur une partie de $\mathbb{C}$.

On retiendra qu'on ne dérive **jamais** (autant le répéter) par rapport à une variable complexe.

Cela rejoint une faute à ne **jamais** commettre : on ne dérive **jamais** par rapport à une variable entière !

Par exemple, pour étudier la monotonie d'une suite réelle, **ça n'a aucun sens** de dériver l'expression de u_n par rapport à l'entier n. Voilà c'est dit.

8.4.2 Extension des résultats

Un certain nombre de résultats s'étendent aux fonctions complexes, mais pas tous :

– Les résultats sur les opérations entre fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (combinaison linéaire, produit, quotient, et les calculs qui vont avec) sont encore valables pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
  La formule de Leibniz est encore valable.
  Le cas de la composition est un peu à part. Pour pouvoir affirmer que $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$, il faut que f et g soient de classe $\mathcal{C}^k$ mais que f soit à valeurs réelles (alors que g peut être à valeurs complexes).

– La fonction $f - g$ est constante sur I si et seulement si on a $f' = g'$ sur I.
  En revanche, il n'est plus question de lier le « signe de la dérivée » avec le « sens de variations », car aucune de ces deux notions n'a de sens pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

  On pourrait toujours parler de « point critique » (un point où la dérivée s'annule), mais cette notion ne présente plus beaucoup d'intérêt (puisqu'on a perdu la notion d'extremum relatif).

– Il n'y a plus de théorème de la bijection réciproque.

– **Important** : il n'y a pas de théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
  On retiendra l'exemple classique de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{it}$, dont la dérivée est $f'(t) = i\mathrm{e}^{it}$.
  On a $f(0) = f(2\pi)$ (valeur commune 1), mais la dérivée de f ne s'annule jamais !

– Conséquence de la perte du théorème de Rolle, **on perd l'égalité des accroissements finis**, mais attention, il reste toujours **l'inégalité des accroissements finis** (voir plus loin).

– Le théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement est encore valable, bien que rarement utilisé.

– On peut encore définir les fonctions K-lipschitziennes (dans $|f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y - x|$, c'est un module à gauche, une valeur absolue à droite).

Proposition 8.4.1 (inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $|f'(x)| \leqslant K$ pour tout x de I.
Alors la fonction f est K-lipschitzienne sur I.
Autrement dit, pour tous x, y de I, on a : $|f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y - x|$.