Chapitre 9

Analyse asymptotique

Sommaire

9.1 Rappels de quelques limites usuelles

Logarithme, exponentielle, puissances : croissances comparées

Les limites qui suivent (cf chapitre 4 : « Techniques d'analyse (dérivation) », constituent une échelle de comparaison entre fonctions puissances, fonction exponentielle, et fonction logarithme :
Pour tous réels strictement positifs α, β, δ, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha\, \mathrm{e}^{\delta x} = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\delta x}}{x^\alpha} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, |\ln(x)|^\beta = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha} = 0}$$

Dérivées usuelles à l'origine

Par ailleurs, soit f une fonction définie et dérivable en 0.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$ (c'est même la définition de la dérivée en 0).

En particulier : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1}$ $\quad\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$

Une simple translation de la variable permet d'écrire : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x-1} = m}$

Dans de nombreux cas usuels, on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ (ce qui traduit le fait que la première bissectrice $y = x$ est la tangente au point $(0, 0)$ de la courbe représentative). On a alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Dans cette catégorie, on trouve : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{th}\,(x)}{x} = 1}$

Voici deux limites utiles : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}}$ (attention au signe !)

Les limites précédentes ont été encadrées car... il faut les connaître !

9.2 Comparaison des suites

Dans toute cette section, on considère des suites à valeurs réelles ou complexes.

Quand on *compare* une suite (u_n) à une suite (v_n), on suppose que v_n est non nul pour « n assez grand ».

Cette hypothèse (qui sera toujours sous-entendue) permet d'évoquer $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

Les comparaisons de suites sont toujours effectuées « quand n tend vers $+\infty$ ».

9.2.1 Domination, négligeabilité, équivalence

Définition 9.2.1 (suite dominée par une autre)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes.
On dit que la suite (u_n) est *dominée* par la suite (v_n) si la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée.
On note alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, et on prononce : « u_n est un grand O de v_n ».

Remarques

Dire que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, c'est dire qu'il existe M dans $\mathbb{R}^+$ et n_0 dans $\mathbb{N}$ tels que $|u_n| \leqslant M\,|v_n|$ pour $n \geqslant n_0$.
Si $0 < m \leqslant \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M$ pour n assez grand, chacune des deux suites (u_n) et (v_n) est dominée par l'autre.
Il est clair que si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ (transitivité de la domination).

Définition 9.2.2 (suite négligeable devant une autre)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes.
On dit que la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
On note alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ (et on prononce : u_n est un « petit o » de v_n).

Remarques

Dire que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, c'est dire que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|$.
Il est manifeste que si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, mais la réciproque est fausse.
Il est clair que si $\begin{cases} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ v_n = \mathrm{o}(w_n) \end{cases}$ ou $\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ v_n = \mathrm{O}(w_n) \end{cases}$ ou $\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ v_n = \mathrm{o}(w_n) \end{cases}$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$

Définition 9.2.3 (suite équivalente à une autre)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes.
On dit que la suite (u_n) est *équivalente* à la suite (v_n) si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Remarques

– Rappelons qu'on considère ici des suites réelles ou complexes dont le terme général est non nul au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire au-delà d'un certain entier n_0).
  Sur l'ensemble de ces suites, la relation $u_n \sim v_n$ est une relation d'équivalence.
  Pour toutes suites (u_n), (v_n) et (w_n), on a en effet les propriétés suivantes :
  $u_n \sim u_n$ (réflexivité), $u_n \sim v_n \;\Leftrightarrow\; v_n \sim u_n$ (symétrie), $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{cases} \Rightarrow u_n \sim w_n$ (transitivité).
– La symétrie de la relation $\sim$ permet de parler de *suites équivalentes* (sans préciser dans quel ordre).
– Si λ est un scalaire **non nul**, on a : $u_n \sim \lambda \;\Leftrightarrow\; \lim u_n = \lambda$.
  Attention !!! on n'écrira jamais $u_n \sim 0$ (car ça n'a aucun sens).

Proposition 9.2.1
Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes.
Alors il revient au même de dire $u_n \sim v_n$ ou $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.

9.2.2 Utilisation des notations de Landau

Les notations o et O, dans $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ sont appelées « notations de Landau ».

Elles permettent de renseigner sur l'ordre de grandeur du terme général d'une suite (quand c'est la seule information importante). Plutôt que des égalités, les propositions $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ (resp. $u_n = \mathrm{O}(v_n)$) doivent être interprétées comme l'appartenance de (u_n) à la catégorie de suites qui sont négligeables devant (resp. dominées par) la suite (v_n).

Dans les écritures $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, la suite (v_n) est le plus souvent une *suite de référence*.

Par exemple :

– écrire $u_n = \mathrm{O}(1)$, c'est dire que la suite (u_n) est bornée.

– écrire $u_n = \mathrm{o}(1)$, c'est dire que la suite (u_n) converge vers 0.

– écrire $u_n = \mathrm{O}(n^2)$, c'est dire qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que $|u_n| \leqslant Kn^2$ pour n assez grand.

– écrire $u_n = \mathrm{o}(n^2)$, c'est dire que $\lim \dfrac{u_n}{n^2} = 0$.

– écrire $u_n = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, c'est dire que $\lim n^2 u_n = 0$.

La relation $u_n \sim v_n$, synonyme de $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$, sera souvent écrite $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$: sous cette forme, elle signifie que u_n est la somme de v_n et d'une suite elle-même négligeable devant la suite (v_n).

Inversement, si à l'issue d'un calcul on arrive à $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$, on pourra écrire $u_n \sim v_n$.

La relation $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$ est parfois plus fiable que la notation $u_n \sim v_n$, notamment dans les opérations de sommation (voir plus loin). Mais on utilise par ailleurs très souvent les notations de Landau dans des calculs algébriques (notamment dans la partie « développements limités » de ce chapitre).

Il suffit de connaître quelques règles assez intuitives, notamment :

Proposition 9.2.2

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes. Soit λ un scalaire non nul.

Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\lambda\, u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\lambda\, u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Le résultat précédent signifie que dans les relations de domination et de négligeabilité, les constantes numériques multiplicatives sont simplement « cachées ».

Par exemple, on n'écrira jamais $u_n = \mathrm{O}(2n^2)$ ou $u_n = \mathrm{O}(-n^2)$, mais plus simplement $u_n = \mathrm{O}(n^2)$.

Le résultat suivant dit que l'ensemble des suites qui sont dominées par (resp. négligeables devant) une suite (w_n) donnée est stable par combinaisons linéaires :

Proposition 9.2.3

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites à valeurs réelles ou complexes.

Si $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ et si $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors pour tous scalaires α et β, on a : $\alpha u_n + \beta v_n = \mathrm{O}(w_n)$.

Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et si $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors pour tous scalaires α et β, on a : $\alpha u_n + \beta v_n = \mathrm{o}(w_n)$.

Plus généralement, considérons une suite (u_n) de terme général $u_n = v_n + \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n + \cdots$, où les suites (a_n), (b_n), (c_n), etc. sont négligeables devant la suite (v_n).

Alors on peut écrire $\alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n + \cdots = \mathrm{o}(v_n)$, donc $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$, donc $u_n \sim v_n$.

9.2.3 Traduction des croissances comparées

Soit α, β, δ trois réels strictement positifs quelconques.

– On connaît la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \mathrm{e}^{-\delta n} = 0$, qui peut maintenant s'écrire : $\boxed{\mathrm{e}^{-\delta n} = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)}$

  Ainsi $\mathrm{e}^{-\delta n}$ (qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$) est négligeable devant toute puissance de $1/n$.

  On dit aussi que lorsque n tend vers $+\infty$, $\mathrm{e}^{-\delta n}$ (qui tend alors vers 0) est un « infiniment petit d'ordre supérieur à tout ordre donné par rapport à l'infiniment petit principal $1/n$ ».

– On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\delta n}}{n^\alpha} = +\infty$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^{\delta n}} = 0$, ce qui peut s'écrire : $\boxed{n^\alpha = \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\delta n})}$

  Ainsi tout puissance de n est négligeable devant $\mathrm{e}^{\delta n}$ quand n tend vers $+\infty$.

– On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^\beta(n)}{n^\alpha} = 0$, ce qui s'écrit maintenant $\boxed{\ln^\beta(n) = \mathrm{o}(n^\alpha)}$

  Ainsi tout puissance de $\ln(n)$ est négligeable devant toute puissance de n quand n tend vers $+\infty$.

– Pour résumer, de façon très informelle, on peut retenir : $\ln^\beta(n) << n^\alpha << \mathrm{e}^{\delta n}$ (avec α, β, δ dans $\mathbb{R}^{+*}$)

9.2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 9.2.4 (conservation du signe)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles.
Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n gardent le même signe au voisinage de $+\infty$.

Proposition 9.2.5 (conservation de la limite)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes.
Si $u_n \sim v_n$, et si $\lim v_n = \ell$ (avec ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$), alors $\lim u_n = \ell$.
Réciproquement : si $\lim u_n = \lim v_n = \ell$ (où ℓ est dans $\mathbb{C}^*$), alors $u_n \sim v_n$.

Attention ! ! Si $\lim u_n = \lim v_n = \ell$, avec $\ell \in \{-\infty, 0, +\infty\}$, rien ne permet d'affirmer que $u_n \sim v_n$.

Attention ! ! même si $\lim u_n = 0$, on n'écrira jamais $u_n \sim 0$ (on l'a déjà dit !).

Proposition 9.2.6 (équivalences dans un produit ou dans un quotient)
Soit (u_n), (v_n) et (a_n) trois suites à valeurs réelles ou complexes.
Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n a_n \sim v_n a_n$ et $\dfrac{a_n}{u_n} \sim \dfrac{a_n}{v_n}$, et plus généralement : $a_n\, u_n^\alpha \sim a_n\, v_n^\alpha$.

Dans un produit ou un quotient de suites, on peut donc remplacer l'une des suites par une suite équivalente. L'expression initiale est alors équivalente à l'expression finale. En particulier, il y a conservation de la limite éventuelle quand n tend vers $+\infty$.

Un cas particulier très simple est le produit par une constante non nulle λ : si $u_n \sim v_n$ alors $\lambda\, u_n \sim \lambda\, v_n$.

Attention aux constantes multiplicatives !

On sait qu'elles sont « cachées » dans les relations du type $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ ou $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, mais il en va tout autrement dans les relations du type $u_n \sim v_n$. Pour prendre un exemple, on sait que $u_n = \mathrm{o}(2n^3) \Leftrightarrow u_n = \mathrm{o}(-n^3) \Leftrightarrow u_n = \mathrm{o}(n^3)$ (et cette dernière formulation est recommandée).

En revanche, les propositions $u_n \sim 2n^3$, $u_n \sim -n^3$, et $u_n \sim n^3$ n'ont pas la même signification !

Proposition 9.2.7 (jamais d'équivalents dans une somme !!!)
Attention !! Si $u_n \sim v_n$, alors on n'a pas, en général, $u_n + a_n \sim v_n + a_n$.

On retiendra qu'on ne doit **JAMAIS** utiliser d'équivalents dans une somme.
Posons par exemple $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$, et $a_n = -1$.
On a : $u_n \sim v_n$ car ces deux suites tendent vers la même limite non nulle $\ell = 1$.
En revanche $u_n + a_n = \dfrac{1}{n}$ n'est pas équivalent à $v_n + a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

9.2.5 Limites usuelles et équivalents de suites

Les limites usuelles rappelées au début du chapitre peuvent servir aux calculs d'équivalents de suites.
L'idée générale est que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ et $\lim u_n = a$, alors $\lim f(u_n) = \ell$, ou encore $f(u_n) \sim \ell$.
Par exemple : si $\lim u_n = 0$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^{u_n} - 1}{u_n} \sim 1$, ou encore $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.
On trouve donc facilement :

- si $\lim u_n = 0$, alors : $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$, $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n$
  en particulier, toujours si $\lim u_n = 0$, on a $\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{2}$
- si $\lim u_n = 1$, alors : $\ln(u_n) \sim u_n - 1$, $u_n^\alpha - 1 \sim \alpha(u_n - 1)$
- si $\lim u_n = 0$, alors : $\sin(u_n) \sim u_n$, $\tan(u_n) \sim u_n$, $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$, $\mathrm{th}\,(u_n) \sim u_n$
- si $\lim u_n = 0$, alors : $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$, $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$

9.3 Comparaison des fonctions

9.3.1 Domination, négligeabilité, équivalence

Dans ce paragraphe, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
On désigne par a un élément ou une extrémité de I (a est dans $\overline{\mathbb{R}}$).
On se limite ici à des fonctions définies sur $I \setminus \{a\}$ et à valeurs réelles ou complexes (à valeurs réelles dans la plupart des cas), et qui ne s'annulent pas au voisinage de a (elles peuvent être définies et nulles au point a lui-même, mais ça n'intervient pas dans les définitions).
Les comparaisons de fonctions ont lieu au voisinage du point a, avec a dans $\mathbb{R}$, ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ (alors que pour les suites, les comparaisons ont lieu uniquement quand n tend vers $+\infty$).
Les définitions suivantes constituent des *comparaisons locales* de fonctions quand x tend vers a (on dit aussi, de façon plus informelle mais moins précise, que les comparaisons sont effectuées « en a »).
Les définitions et les propriétés qui en découlent sont très proches de celles vues pour les comparaisons des suites numériques. On se contente donc d'une simple adaptation de ce qui a été dit précédemment.

Définition 9.3.1 (fonction dominée par une autre en un point)
Soient f, g deux fonctions de $I \setminus \{a\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
On dit que f est *dominée* par g quand x tend vers a (ou en a) si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
On note alors $f = \mathrm{O}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{O}_a(g)$.

Définition équivalente : il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$ au voisinage de a.

Définition 9.3.2 (fonction négligeable devant une autre en un point)
Soient f, g deux fonctions de $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
On dit que f est *négligeable* devant g quand x tend vers a (ou en a) si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
On note alors $f = \mathrm{o}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{o}_a(g)$.

Définition équivalente : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a (dépendant bien sûr de ε) sur lequel on a l'inégalité $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$.

Définition 9.3.3 (fonction équivalente à une autre en un point)
Soient f, g deux fonctions de $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a (ou en a) si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On note alors $f \sim g$, ou éventuellement $f \underset{a}{\sim} g$.

Définition équivalente : dire que $f \underset{a}{\sim} g$, c'est dire que $f - g$ est négligeable devant g en a.

9.3.2 Propriétés des relations de comparaison

Dans les résultats suivants, on désigne par f, g, h des fonctions numériques définies sur $I \setminus \{a\}$ et qui ne s'annulent pas au voisinage de a. Les relations de comparaison sont établies quand x tend vers a.

- Si $f = \mathrm{o}(g)$ alors $f = \mathrm{O}(g)$.
  Si $f = \mathrm{o}(g)$ et $g = \mathrm{O}(h)$ alors $f = \mathrm{o}(h)$ (même résultat si $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{o}(h)$).
- Si $f = \mathrm{O}(h)$ et si $g = \mathrm{O}(h)$, alors $\alpha f + \beta g = \mathrm{O}(h)$ (même résultat avec des « o »).
  Si $\alpha \neq 0$ et si $f = \mathrm{O}(g)$ (resp. $f = \mathrm{o}(g)$, $f \sim g$), alors $f = \mathrm{O}(\alpha g)$ (resp. $f = \mathrm{o}(g)$, $\alpha f \sim \alpha g$)
- Si $f \sim g$ (et sont à valeurs réelles), alors f et g gardent le même signe au voisinage de $+\infty$.
  Si $f \sim g$, et si $\lim g = \ell$ (avec ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$), alors $\lim f = \ell$.
  Réciproquement : si $\lim f = \lim g = \ell$ (où ℓ est un <u>scalaire non nul</u>), alors $f \sim g$.
- Si $f \sim g$ alors $fh \sim gh$ et $\dfrac{h}{f} \sim \dfrac{h}{g}$, et plus généralement : $h\,f^{\alpha} \sim h\,g^{\alpha}$.
- Attention !! Si $f \sim g$ alors on n'a pas, en général, $f + h \sim g + h$.
- Si $f_2, f_3, \ldots, f_n$ sont des $\mathrm{o}(f_1)$ alors $f_1 + f_2 + \cdots + f_n \sim f_1$.

Proposition 9.3.1 (changement de variable dans un équivalent)
Soient f, g deux fonctions de $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
Soit φ une fonction de J dans I, qui tend vers a quand x tend vers b dans J.
Si f est dominée par g en a, alors $f \circ \varphi$ est dominée par $g \circ \varphi$ en b.
Si f est négligeable devant g en a, alors $f \circ \varphi$ est négligeable devant $g \circ \varphi$ en b.
Si f et g sont équivalentes en a, alors $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ sont équivalentes en b.

C'est surtout cette dernière propriété qui est utilisée.
Par exemple, du fait que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ en 0, on peut écrire : $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$.
Toujours grâce à $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, on trouve : $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ ou encore $\sin(\ln(x)) \underset{1}{\sim} \ln(x) \underset{1}{\sim} (x-1)$.

9.3.3 Conseils pour utiliser les équivalents

– Les équivalents servent essentiellement aux calculs de limites :
  On transforme une expression $f(x)$, dont on cherche la limite ℓ en un point a, en une expression équivalente $g(x)$ dont la limite en ce point est évidente (si ℓ est un scalaire non nul, il est courant qu'on aboutisse à $g(x) = \ell$).
  Les outils essentiels sont les équivalents classiques (voir plus loin) et la possibilité qu'on a de remplacer les facteurs d'un produit ou d'un quotient par des équivalents.

– L'erreur la plus fréquente consiste à utiliser les équivalents dans des sommes. La seule propriété concernant les équivalents et les sommes peut s'écrire : $g = \mathrm{o}(f) \Rightarrow f + g \sim f$.

– On évitera d'utiliser un équivalent d'une fonction f sous la forme $f \sim g + h$, avec $h = \mathrm{o}(g)$, et surtout de donner un rôle à h : on se contentera d'écrire $f \sim g$.
  Écrire par exemple $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \dfrac{x^2}{2}$ n'est pas faux mais c'est dangereux si on donne un rôle à $-\dfrac{x^2}{2}$.
  En effet, on a aussi : $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 + x^2 \underset{0}{\sim} 1 - 36x^2 \ldots$
  Pour cet exemple, la solution est sans doute d'écrire : $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

– Soit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, avec $\ell \neq 0$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$. Mais si $\ell = 0$, on n'écrira pas $f(x) \sim 0$!

– Si $f \sim g$ (f et g étant positives et tendant vers une limite ℓ différente de 1) alors $\ln(f) \sim \ln(g)$.
  C'est faux si f et g tendent vers 1.
  Par exemple, $(1 + x) \underset{0}{\sim} (1 + x^2)$, mais en ce point $\begin{cases} \ln(1 + x) \sim x \\ \ln(1 + x^2) \sim x^2 \end{cases}$ et $x \not\sim x^2$

– On évitera surtout de prendre des « exponentielles » d'équivalents :
  En effet $\mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^g \Leftrightarrow f - g = \mathrm{o}(1)$, ce qui n'équivaut pas du tout à $f \sim g$.
  Exemples : considérer x et x^2 en 0, ou encore x et $x + 1$ en $+\infty$.

9.3.4 Comparaisons usuelles

Exponentielles, puissances et logarithmes

Soient α, β et δ des réels strictement positifs.

On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\delta x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^{\delta x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \ln^\beta(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha |\ln^\beta(x)| = 0$.

Autrement dit : $x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(e^{\beta x})$, $\mathrm{e}^{\delta x} \underset{-\infty}{=} \mathrm{o}(|x|^{-\alpha})$, $\ln(x)^\beta \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x^\alpha)$, $|\ln(x)|^\beta \underset{0}{=} \mathrm{o}(x^{-\alpha})$.

Équivalents classiques

Si f est dérivable en 0 et si de plus $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors $f(x) \sim x$ en 0.

En particulier, on a les équivalents : $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$, et $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

Toujours à l'origine : $(1 + x)^m - 1 \underset{0}{\sim} mx$, et $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

On peut aussi écrire, au voisinage de $x = 1$: $x^m - 1 \underset{1}{\sim} m(x - 1)$ et $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$.

Polynômes et fractions rationnelles

Soit $P(x) = a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ un polynôme ($m < n$, $a_m \neq 0$, $a_n \neq 0$).

Au voisinage de l'origine : $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$ (monôme de plus bas degré).

Au voisinage de $\pm\infty$: $P(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n$ (monôme de plus haut degré).

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle (P et Q deux polynômes).

Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus bas degré.

Au voisinage de $\pm\infty$, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus haut degré.

9.4 Développements limités

9.4.1 DL, unicité des coefficients, troncature

Définition 9.4.1 (développement limité d'ordre n en un point)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit x_0 un réel élément ou extrémité de I.
Soit n un entier naturel. On dit que f admet un *développement limité* (en abrégé un DL) à l'ordre n en x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ tels que :
$\forall\, x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, avec $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Utilisation des notations « o » ou « O »

Avec les notations de Landau, on écrira plutôt $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.

Il arrive qu'on utilise les notations "O" de Landau dans un développement limité.

Par exemple, si $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 - x^4 + \mathrm{o}(x^4)$, alors $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 + \mathrm{O}(x^4)$.

Cette dernière écriture contient un peu plus d'informations que $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

Troncature d'un développement limité

Supposons que f admette un DL d'ordre n en x_0. Soit p un entier naturel, avec $p \leqslant n$.

Alors f admet un DL d'ordre p en x_0, obtenu par *troncature*.

Plus précisément : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \Rightarrow f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k (x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^p)$.

Par exemple, si $f(x) = 1 - x + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$, alors $f(x) = 1 - x + 2x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

Proposition 9.4.1 (unicité du développement limité)
Soit f une fonction admettant un DL d'ordre n au point x_0 : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.
Alors les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont définis de façon unique.
Le polynôme $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ est appelé partie régulière *du développement limité.*

Importance des développements à l'origine

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit x_0 un réel élément ou extrémité de I.

Considérons la fonction g définie (au voisinage de $h = 0$) par $g(h) = f(x_0 + h)$.

Alors f possède un DL d'ordre n en x_0 si et seulement si g possède un DL d'ordre n en 0.

Plus précisément, on a l'équivalence (pour f le DL est en $x = x_0$, et pour g il est en $h = 0$) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \Leftrightarrow g(h) = f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \mathrm{o}(h^n)$$

Forme normalisée d'un développement limité

Soit f une fonction à valeurs réelles, admettant un DL d'ordre n en x_0.

On sait que ce développement : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$

peut aussi s'écrire (en posant $x = x_0 + h$) : $f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$.

Sous cette forme, on note p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$.

On obtient : $f(x_0 + h) = h^p(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + \mathrm{o}(h^{n-p}))$

Cette écriture est appelée *forme normalisée* du développement limité de f en x_0.

Avec cette écriture (et puisque $a_p \neq 0$), on trouve $f(x_0 + h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p$.

Cet équivalent donne le signe de f au voisinage de $x = x_0$:

– Si p est pair, alors $f(x)$ garde le signe de a_p au voisinage de x_0.

– Si p est impair, alors $f(x)$ change de signe en x_0 :
  Plus précisément, $f(x)$ est du signe contraire de a_p si $x < x_0$, puis du signe de a_p si $x > x_0$.

9.4.2 Développement limité en 0 et parité

Soit f une fonction définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

On suppose que f admet un développement limité d'ordre n à l'origine : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

Le changement de x en $-x$ donne alors le DL : $f(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

– Si f est paire, la partie régulière de son DL en 0 est un polynôme pair.
  Autrement dit les coefficients d'indice impair a_{2k+1} sont nuls.
  Le développement limité de f se réduit donc à : $f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + \cdots$

– Si f est impaire, la partie régulière de son DL en 0 est un polynôme impair.
  Autrement dit les coefficients d'indice pair a_{2k} sont nuls.
  Le développement limité de f se réduit donc à : $f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots$

Si on forme le DL d'une fonction dont on sait qu'elle paire ou impaire, il pourra être utile d'utiliser la notation "O" pour améliorer à peu de frais la précision du développement.

Supposons par exemple que f soit paire : le développement $f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \mathrm{O}(x^6)$ est plus précis que $f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \mathrm{o}(x^5)$, lui-même plus précis que $f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

De même, si f est impaire, le développement $f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \mathrm{O}(x^7)$ est plus précis que $f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \mathrm{o}(x^6)$, lui-même plus précis que $f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \mathrm{o}(x^5)$.

9.4.3 Développements limités et dérivabilité

Développement limité d'ordre 0 et continuité, DL et dérivabilité

Un DL de f d'ordre 0 en x_0 s'écrit $f(x) = a_0 + \mathrm{o}(1)$, où $\mathrm{o}(1)$ est une fonction tendant vers 0 en x_0.

Dire que f a un tel DL en x_0, c'est dire que f est continue (ou prolongeable par continuité) en x_0.

Après prolongement éventuel, ce développement s'écrit : $f(x) = f(x_0) + \mathrm{o}(1)$.

Développement limité d'ordre 1 et dérivabilité

Un DL de f d'ordre 1 en x_0 s'écrit $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.

Dire que f admet un tel DL en x_0, c'est dire que f est dérivable (après prolongement éventuel en x_0).

Après un tel prolongement, ce DL s'écrit $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.

Développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ et dérivabilité

Attention ! l'existence d'un DL d'ordre $\geqslant 2$ en x_0 n'implique pas que f soit deux fois dérivable en x_0.

Un contre-exemple est donné par $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ en 0.

En effet, on a $f(x) = x^2\Bigl(x \sin(1/x)\Bigr)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$, donc $f(x) = \mathrm{o}(x^2)$.

On a donc un DL d'ordre 2 à l'origine : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \mathrm{o}(x^2)$, avec $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

Par troncature à l'ordre 1, on voit que f est dérivable en 0, avec $f(0) = f'(0) = 0$.

Mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

En effet, pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = 3x^2 \sin\Bigl(\dfrac{1}{x}\Bigr) + x \cos\Bigl(\dfrac{1}{x}\Bigr)$, et $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Obtention d'un DL par la formule de Taylor-Young

Proposition 9.4.2 (DL obtenu par la formule de Taylor-Young)
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$, et si x_0 appartient à I, alors f possède un DL d'ordre n en x_0.
Ce développement est obtenu par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, on a le développement :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

9.4.4 Développements limités usuels

Tous les développements ci-dessous sont valables à l'origine, et peuvent être obtenus par la formule de Taylor-Young (ou par d'autres méthodes qui seront exposées plus loin).

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^6)} \qquad \boxed{\mathrm{th}\,(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^6)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \mathrm{o}(x^{2n+2})} \qquad \boxed{\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \cdots}$$

9.5 Opérations sur les développements limités

Pour simplifier, les résultats sont énoncés pour des développements limités à l'origine, mais on peut facilement les adapter à des développements en un autre point.

Pour chaque méthode, on donne un exemple d'utilisation (qui utilise éventuellement certains des développements qui seront présentés un peu plus loin).

9.5.1 Utilisation de combinaisons linéaires

Proposition 9.5.1 (combinaison linéaire de deux développements limités)
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ *et* $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.
Alors, pour tous scalaires α, β, *on a :* $(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

Exemple 1 : $\sin\Big(x + \dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(\sin(x) + \cos(x)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big(1 + x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4)\Big)$.

Exemple 2 : $\dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$.

Exemple 3 : on sait que $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{2n} \dfrac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^{2n})$ donc $\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \dfrac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^{2n})$ pour tout n.

On en déduit : $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n})$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n})$

9.5.2 Produit de deux développements limités

Proposition 9.5.2 (produit de deux développements limités)
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ *et* $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.
Alors $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$, *avec* $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Exemple 1 :

On sait que $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4)$ et $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

On en déduit $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x} = 1 + 2x + \dfrac{5}{2}\,x^2 + \dfrac{8}{3}\,x^3 + \dfrac{65}{24}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)$

Exemple 2 :

On sait que : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$

Par élévation au carré, on en déduit : $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \mathrm{o}(x^n)$

Utilisation des formes normalisées :

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL en 0.

La forme normalisée de ces deux DL aide à comprendre quel est l'ordre du développement produit.

Posons par exemple $\begin{cases} f(x) = x^p\Big(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n)\Big) \\ g(x) = x^q\Big(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m + \mathrm{o}(x^m)\Big) \end{cases}$ avec $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$.

Ainsi $f(x)g(x) = x^{p+q}\Big(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n)\Big)\Big(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m + \mathrm{o}(x^m)\Big)$.

Les deux DL entre parenthèses doivent être tronqués à l'ordre minimum (supposons par exemple $n < m$).

On obtient alors le développement limité de fg en 0 :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= x^{p+q}\Big(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n)\Big)\Big(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \mathrm{o}(x^n)\Big) \\ &= x^{p+q}\Big(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)\Big) \text{ où } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \end{aligned}$$

Par exemple, pour calculer le DL de $(1 - \cos(x))(\sin(x) - x)$ en 0 à l'ordre 8 :

On écrit le développement normalisé : $1 - \cos(x) = \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^5) = x^2\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^3)\Big)$

On écrit celui de : $\sin(x) - x = -\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \mathrm{o}(x^6) = x^3\Big(-\dfrac{1}{6} + \dfrac{x^2}{120} + \mathrm{o}(x^3)\Big)$.

Ainsi : $(1 - \cos(x))(\sin(x) - x) = x^5\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^3)\Big)\Big(-\dfrac{1}{6} + \dfrac{x^2}{120} + \mathrm{o}(x^3)\Big) = x^5\Big(-\dfrac{1}{12} + \dfrac{x^2}{90} + \mathrm{o}(x^3)\Big)$

9.5.3 Composition de deux DL

Proposition 9.5.3 (composition de deux développements limités)

On suppose $f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n)$, avec $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ et $g(y) = Q(y) + \mathrm{o}(y^n)$, avec $Q(y) = \sum_{k=0}^{n} b_k y^k$.

On note l'hypothèse $P(0) = a_0 = 0$, donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, qui permet de considérer $g \circ f$ quand $x \to 0$.

Dans ces conditions, la fonction $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en conservant les termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans $Q(y)$ quand on a posé $y = P(x)$.

Dans la pratique, on pose $g(y) = \sum_{k=0}^{n} b_k y^k + \mathrm{o}(y^n)$ et on remplace y par le DL de $f(x)$.

On calcule de proche en proche les DL des puissances successives $y^k = f(x)^k$, en ne gardant à chaque étape que les puissances x^m avec $m \leqslant n$.

Exemple :

Supposons $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$ et $g(y) = 1 + y + 3y^2 - y^3 - y^4 + \mathrm{o}(y^4)$.

Posons $y = f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

On trouve $y^2 = x^2 - 2x^3 + 5x^4 + \mathrm{o}(x^4)$, puis $y^3 = x^3 - 3x^4 + \mathrm{o}(x^4)$ et $y^4 = x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

On en déduit le développement limité de $g \circ f$ à l'ordre 4 à l'origine :

$$(g \circ f)(x) = 1 + y + 3y^2 - y^3 - y^4 + \mathrm{o}(y^4) = 1 + x + 2x^2 - 5x^3 + 18x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

Les calculs précédents peuvent avantageusement prendre place dans un tableau comme indiqué ci-contre. Un tel tableau est particulièrement indiqué quand aucun des deux DL à composer n'est pair ou impair.

					coeff
y	x	$-x^2$	$2x^3$	x^4	1
y^2		x^2	$-2x^3$	$5x^4$	3
y^3			x^3	$-3x^4$	-1
y^4				x^4	-1
	x	$2x^2$	$-5x^3$	$18x^4$	

Une remarque importante

La forme « triangulaire supérieure » du tableau précédent est plus que normale !

Elle traduit le fait que $y = f(x)$ est un infiniment petit quand x tend vers 0, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Cette condition est indispensable pour que la composition du DL de f par celui de g soit possible.

9.5.4 Inverse d'un développement limité

Proposition 9.5.4 (inverse d'un développement limité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$, avec $a_0 \neq 0$.

Dans ces conditions la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ possède un DL d'ordre n en 0.

Pour cela on écrit $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0(1+g(x))}$ où $g(x) = \dfrac{1}{a_0}\Big(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n)\Big)$.

On compose ensuite le développement de $g(x)$ par celui de la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{1+y}$.

Exemple :

On veut calculer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'origine, à l'ordre 7.

On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \mathrm{o}(x^7) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)$.

On pose donc $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1+g(x)}$, avec $g(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)$.

On injecte ensuite $y = g(x)$ dans le développement $\dfrac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \mathrm{O}(y^4)$.

On trouve $y^2 = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{24} + \mathrm{o}(x^7)$, $y^3 = -\dfrac{x^6}{8} + \mathrm{o}(x^7)$, et finalement $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)$.

9.5.5 Quotient de deux développements limités

Proposition 9.5.5

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$, avec $b_0 \neq 0$.

On suppose donc que g ne tend vers 0 à l'origine. Alors $\dfrac{f}{g}$ admet un DL en 0 à l'ordre n.

Ce développement est obtenu en effectuant le produit de celui de f par celui de $\dfrac{1}{g}$.

Exemple : on peut obtenir le développement limité de $\tan(x)$ en 0 par quotient.

On sait que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathrm{o}(x^8)$, et on a vu que $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi : } \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \mathrm{o}(x^7)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)\Big)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \mathrm{o}(x^8)\end{aligned}$$

9.5.6 Primitivation d'un DL

Proposition 9.5.6 (primitation d'un développement limité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I (donc une fonction dérivable telle que $F' = f$).

Alors F possède en 0 un DL d'ordre $n+1$ obtenu par intégration terme à terme de celui de f.

Plus précisément : $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1} + \mathrm{o}(x^{n+1})$ (ne pas oublier $F(0)$...)

Exemple 1 : Si $f(x) = \ln(\cos(x))$, alors $f'(x) = -\tan(x) = -x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^6)$.

On en déduit $f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + \mathrm{o}(x^7)$.

Exemple 2 : Si $f(x) = \arctan\Big(\frac{x+2}{1-2x}\Big)$, alors $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

On en déduit $f(x) = \arctan(2) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathrm{o}(x^8)$.

9.5.7 Dérivation d'un DL

Proposition 9.5.7 (dérivation d'un développement limité)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

Alors le développement limité de f' en 0 à l'ordre n s'obtient en dérivant terme à terme le développement limité de f en 0 à l'ordre $n+1$ (ces deux DL résultent de la formule de Taylor-Young).

Exemple : On sait que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

Par dérivation, on en déduit : $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \cdots + (n+1)x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

Après une nouvelle dérivation, on obtient : $\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

9.5.8 Pratique des compositions de DL

Quand on doit calculer le développement limité, à un ordre déterminé, d'une fonction f qui s'exprime elle-même à partir d'autres fonctions $g, h, \ldots$ il faut prendre le temps de comprendre à quel ordre les développement de $g, h, \ldots$ doivent être calculés.

Il y a en effet deux risques : partir avec des développements « trop longs » et donc faire des calculs inutiles, ou au contraire partir avec des développements « trop courts » ce qui oblige à tout recommencer.

Exemple 1 : on demande le DL de $f(x) = \ln(1 + x - \arctan(x))$ en 0 à l'ordre 6.

Il est clair qu'il faut composer le développement de $g(x) = x - \arctan(x)$ par celui de $\ln(1 + y)$.

D'une part, $g(x) = x - \arctan(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \mathrm{o}(x^6)$ (ici, il faut pousser le DL à l'ordre 6 : pourquoi ?)

D'autre part, $\ln(1 + y) = y - \dfrac{y^2}{2} + \mathrm{O}(y^3)$ (ici un développement en $\mathrm{O}(y^3)$ suffit : pourquoi ?).

On trouve $y^2 = \dfrac{x^6}{18} + \mathrm{o}(x^6)$ puis finalement : $\ln(1 + x - \arctan(x)) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{18} + \mathrm{o}(x^6)$.

Exemple 2 : On demande le DL en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln(\cos(\sqrt{x}))$ à l'ordre 2.

On écrit $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \mathrm{O}(x^8)$ puis $\cos(\sqrt{x}) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} - \dfrac{x^3}{720} + \mathrm{o}(x^3)$.

On pose $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} - \dfrac{x^3}{720} + \mathrm{o}(x^3)$ et on compose par $\ln(1 + y) = y - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + \mathrm{o}(y^3)$.

Après calcul : $\ln(\cos(\sqrt{x})) = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^3}{45} + \mathrm{o}(x^3)$, donc $\dfrac{1}{x} \ln(\cos(\sqrt{x})) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{12} - \dfrac{x^2}{45} + \mathrm{o}(x^2)$.

Pour obtenir un DL à l'ordre 2, il a donc fallu développer $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 6 (exemple instructif).

Cas particuliers de composition

Quand on veut calculer le DL de $g \circ f(x)$ en 0 en composant les développements de $y = f(x)$ et de $g(y)$ à l'origine, il faut veiller à ce que $y = f(x)$ soit bien un infiniment petit lorsque x tend vers 0, afin que la substitution de y par $f(x)$ soit justifiée dans le développement de $g(y)$.

Si ce n'est pas le cas, on peut parfois s'y ramener, comme dans les exemples suivants :

▷ Si $g(x) = \exp(f(x)) = \exp(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = \exp(a_0)\,\exp(a_1x + a_2x^2 + \cdots)$.
On pose $y = a_1x + a_2x^2 + \cdots$ et on utilise $\exp(y) = 1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + \cdots$

▷ Si $g(x) = \ln(f(x)) = \ln(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = \ln(a_0) + \ln\Big(1 + \dfrac{a_1}{a_0}\,x + \dfrac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots\Big)$.
On pose $y = \dfrac{a_1}{a_0}\,x + \dfrac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots$ et on utilise $\ln(1 + y) = y - \dfrac{y^2}{2} + \cdots$

▷ Si $g(x) = f(x)^\alpha = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^\alpha = a_0^\alpha \Big(1 + \dfrac{a_1}{a_0}\,x + \dfrac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots\Big)^\alpha$.
On pose $y = \dfrac{a_1}{a_0}\,x + \dfrac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots$ et on utilise $(1 + y)^\alpha = 1 + \alpha y + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2}\,y^2 + \cdots$

Remarque sur le développement de $(1 + x)^\alpha$

On sait que $(1 + x)^\alpha = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \mathrm{o}(x^n)$, où $a_k = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - k + 1)}{k!}$.

On remarque la relation $a_{k+1} = a_k\dfrac{\alpha - k}{k + 1}$, qui permet de calculer les a_k de proche en proche.

Si on doit former le DL de $(1+x)^\alpha$ avec une valeur particulière de α, et plutôt que d'utiliser la formule donnant a_k, il est préférable d'exploiter cette récurrence dans un tableau comme indiqué ci-dessous :

multiplicateur	1	α	$(\alpha-1)\frac{1}{2}$	$(\alpha-2)\frac{1}{3}$	$(\alpha-3)\frac{1}{4}$	$(\alpha-4)\frac{1}{5}$
coefficient	$a_0=1$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

Par exemple, pour développer $f(x)=\sqrt{1+x}$:

multiplicateur	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{2}\times\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{2}\times\frac{1}{5}$
coefficient	$a_0=1$	$a_1=\frac{1}{2}$	$a_2=\frac{-1}{8}$	$a_3=\frac{1}{16}$	$a_4=\frac{-5}{128}$	$=a_5=\frac{7}{256}$

On en déduit : $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}-\dfrac{5x^4}{128}+\dfrac{7x^5}{256}+\mathrm{o}(x^5)$

9.6 Application des développements limités

9.6.1 Équivalents et DL

On utilise principalement les équivalents dans les recherches de limites, mais on se tourne vers les développements limités si on a besoin de davantage de précision (par exemple non seulement l'existence d'une demi-tangente mais encore la position de la courbe par rapport à celle-ci) ou quand il est difficile d'utiliser des équivalents (notamment dans les sommes).

– Il arrive qu'on ait besoin de développements limités pour trouver un simple équivalent d'une somme.

  Par exemple, pour un équivalent de $\sin(\mathrm{sh}(x))-\mathrm{sh}(\sin(x))$ en 0, il faut développer $\sin(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ à l'ordre 7 (pour atteindre les premiers coefficients qui ne se simplifient pas) :

  On trouve $\sin(\mathrm{sh}(x))=x-\dfrac{x^5}{15}-\dfrac{x^7}{90}+\mathrm{o}(x^7)$, et $\mathrm{sh}(\sin(x))=x-\dfrac{x^5}{15}+\dfrac{x^7}{90}+\mathrm{o}(x^7)$.

  On obtient finalement : $\sin(\mathrm{sh}(x))-\mathrm{sh}(\sin(x))=-\dfrac{x^7}{45}+\mathrm{o}(x^7)\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^7}{45}$.

– Plus généralement, considérons le développement $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$.

  Si tous les a_k sont nuls, alors $f(x)$ est négligeable devant $(x-x_0)^n$ au voisinage de x_0.

  Sinon, et si m est l'indice minimum tel que $a_m\neq 0$, alors $f(x)\sim a_m(x-x_0)^m$ en x_0.

  Inversement, si $f(x)\sim a_m(x-x_0)^m$ en x_0, avec $m\in\mathbb{N}$, alors $f(x)=a_m(x-x_0)^m+\mathrm{o}((x-x_0)^m)$.

  Plus généralement, considérons par exemple le DL usuel : $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\mathrm{o}(x^4)$.

  Il permet d'écrire les équivalents : $\cos x-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2!}$, ou encore $\cos x-1+\dfrac{x^2}{2!}\underset{0}{\sim}\dfrac{x^4}{4!}$

9.6.2 Position par rapport à une tangente

On suppose que f admet un développement limité d'ordre $n \geqslant 3$ au point x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)).$$

On sait que cela implique la dérivabilité de f en x_0, avec $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$.

L'équation de la tangente Δ à la courbe $y = f(x)$ en $x = x_0$ est donc $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

Remarque : si le DL n'est valable qu'à gauche ou à droite de x_0, il s'agit d'une demi-tangente.

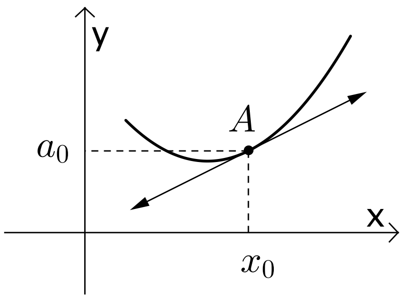
Soit m l'indice minimum tel que $m \geqslant 2$ et $a_m \neq 0$.

Alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \sim a_m(x - x_0)^m$ au voisinage de x_0.

On en déduit le placement local de la courbe $y = f(x)$ par rapport à la (demi-)tangente Δ.

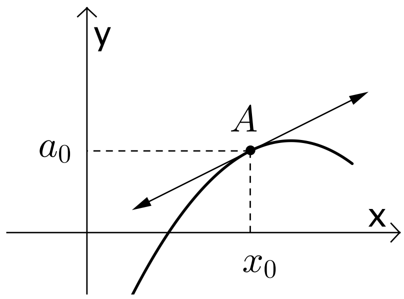
– Si m est pair, le placement de $y = f(x)$ par rapport à Δ est donné par le signe de a_m.
  Si $a_m > 0$, la courbe est localement "au-dessus" de sa tangente.
  Si $a_m < 0$, la courbe est localement "en-dessous" de sa tangente.
– Si m est impair, la courbe $y = f(x)$ "traverse" Δ au voisinage de M_0.
  Dans ce cas, la droite Δ est donc une tangente d'inflexion.

Voici les allures possibles au voisinage de $A(x_0, a_0)$, quand $a_1 = f'(x_0)$ est strictement positif.



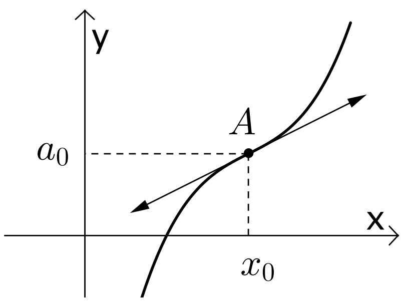
$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_mh^m + \mathrm{o}(h^m)$

$a_1 > 0$, m pair, $a_m > 0$



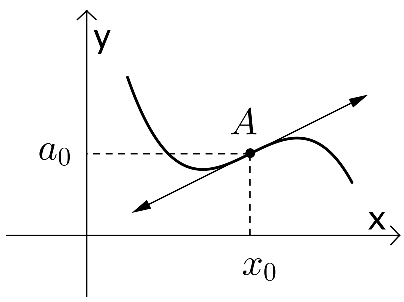
$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_mh^m + \mathrm{o}(h^m)$

$a_1 > 0$, m pair, $a_m < 0$



$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_mh^m + \mathrm{o}(h^m)$

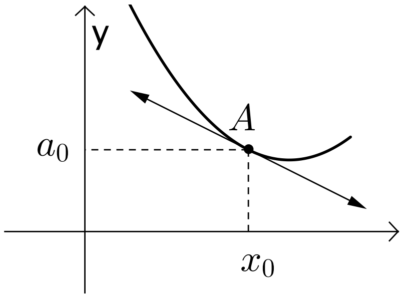
$a_1 > 0$, m impair, $a_m > 0$



$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_mh^m + \mathrm{o}(h^m)$

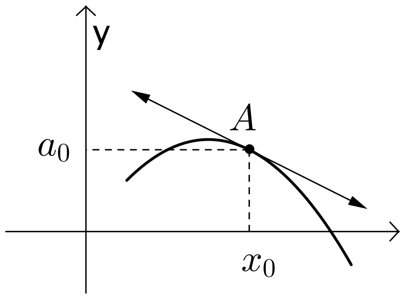
$a_1 > 0$, m impair, $a_m < 0$

Voici les allures possibles au voisinage de $A(x_0, a_0)$, quand $a_1 = f'(x_0)$ est strictement négatif.



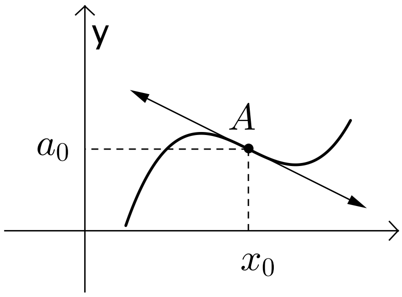
$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

$a_1 < 0$, m pair, $a_m > 0$



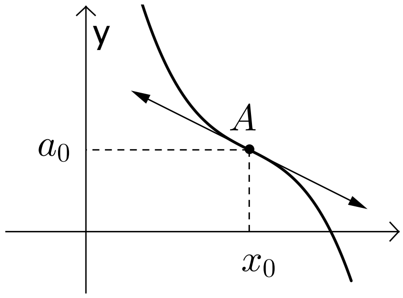
$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

$a_1 < 0$, m pair, $a_m < 0$



$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

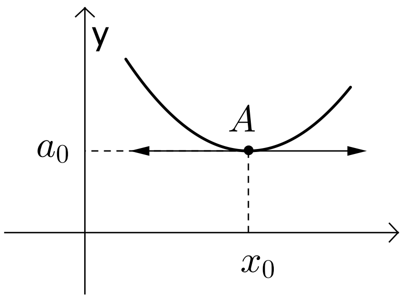
$a_1 < 0$, m impair, $a_m > 0$



$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

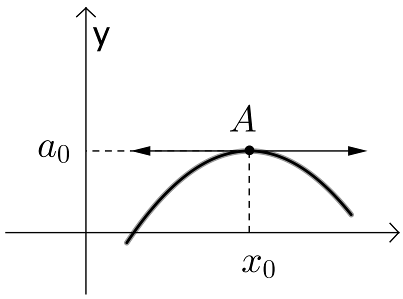
$a_1 < 0$, m impair, $a_m < 0$

Enfin, voici les allures possibles au voisinage de $A(x_0, a_0)$, quand $a_1 = f'(x_0)$ est nul.



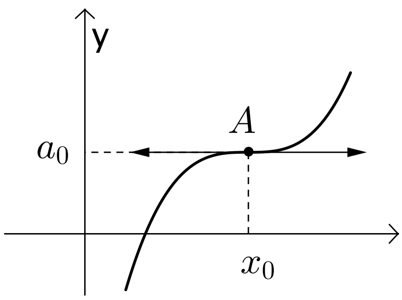
$f(x_0 + h) = a_0 + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

m pair, $a_m > 0$



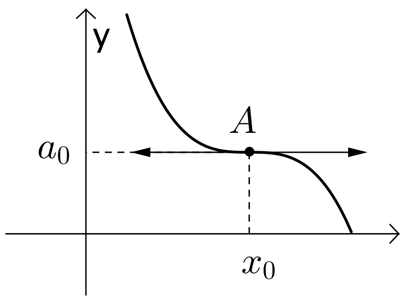
$f(x_0 + h) = a_0 + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

m pair, $a_m < 0$



$f(x_0 + h) = a_0 + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

m impair, $a_m > 0$



$f(x_0 + h) = a_0 + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

m impair, $a_m < 0$

Au vu des douze cas précédents, on comprend qu'une condition *nécessaire* pour que f admette un extrémum local en x_0 est que le coefficient de degré 1 dans le développement de $f(x_0+h)$ soit nul.

Ce n'est pas une condition *suffisante* comme on le voit avec les deux derniers cas ci-dessus.

En revanche, si $f(x_0+h) = a_0 + a_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$, avec $m \geqslant 2$ et pair (en général $m = 2$) et $a_m \neq 0$, alors la fonction f présente en x_0 un extremum local (un minimum si $a_m > 0$, un maximum si $a_m < 0$).

Une remarque sur les DL en dehors de l'origine

On considère le DL : $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$, où $x_0 \neq 0$.

Dans un tel développement, la différence $x - x_0$ constitue « l'infiniment principal », et la présence des puissances successives de $(x-x_0)$ illustre une approximation locale de $f(x)$ (de plus en plus précise au fur et à mesure de l'avancement dans ce développement).

Dans une telle écriture, il est important de conserver l'ordre des puissances croissantes de $(x-x_0)$.

Surtout il ne faut **jamais** développer les $(x-x_0)^k$ quand $k \geqslant 2$.

En revanche, on rappelle que $y = a_0 + a_1(x-x_0) = a_1 x + (a_0 - a_1 x_0)$ représente l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(x_0, a_0 = f(x_0))$ à la courbe $y = f(x)$. On peut réordonner cette partie du développement sans risque.

9.6.3 Branches infinies

Définition 9.6.1 (développement limité au voisinage de $\pm\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). Soit n dans $\mathbb{N}$.
On dit que f a un développement limité (un DL) à l'ordre n en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ tels que : $\forall\, x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}$, avec $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Remarques

– Avec les notations de Landau, le développement précédent s'écrit : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{x^n}\Big)$.

– Les DL en ∞ ont des propriétés analogues à celles des DL en x_0 (unicité, troncature, etc.)

– D'ailleurs un DL en ∞ peut toujours se ramener à un DL en 0 en posant $y = \dfrac{1}{x}$.

En effet, si g est définie au voisinage de $y = 0$ par $g(y) = f\Big(\dfrac{1}{y}\Big)$, on a l'équivalence :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{x^n}\Big) \Leftrightarrow g(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^k + \mathrm{o}(y^n)$$

Placement par rapport à une asymptote

On suppose qu'au voisinage de $\pm\infty$ on a le développement : $\dfrac{f(x)}{x} = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^n}\Big)$.

Alors $f(x) = a_0 x + a_1 + \dfrac{a_2}{x} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^{n-1}} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^{n-1}}\Big)$

En particulier, on observe que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - a_0 x - a_1) = 0$.

La droite Δ d'équation $y = a_0 x + a_1$ est donc asymptote à la courbe $y = f(x)$ quand $x \to \pm\infty$.

Soit m l'indice minimum tel que $m \geqslant 2$ et $a_m \neq 0$. Alors $f(x) - a_0 x - a_1 \sim \dfrac{a_m}{x^{m-1}}$.

On en déduit le placement de la courbe $y = f(x)$ par rapport à Δ au voisinage de $\pm\infty$.

Un exemple de recherche d'asymptote

On considère la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_\lambda(x) = (2x - \lambda)\mathrm{e}^{1/x}$, où λ est un paramètre réel.

On effectue le changement de variable $x = \dfrac{1}{y}$ pour se ramener au voisinage de $y = 0$. On trouve :

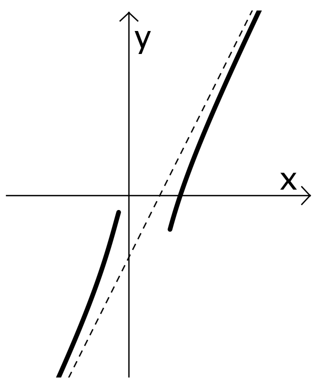
$$f_\lambda(x) = \Big(\frac{2}{y} - \lambda\Big)\mathrm{e}^y = \frac{1}{y}(2 - \lambda y)\Big(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \mathrm{o}(y^3)\Big) = \frac{1}{y}\Big(2 + (2-\lambda)y + (1-\lambda)y^2 + \Big(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{2}\Big)y^3 + \mathrm{o}(y^3)\Big)$$

Ainsi, de retour à la variable x, on obtient : $f_\lambda(x) = 2x + 2 - \lambda + \dfrac{1-\lambda}{x} + \Big(\dfrac{1}{3} - \dfrac{\lambda}{2}\Big)\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$

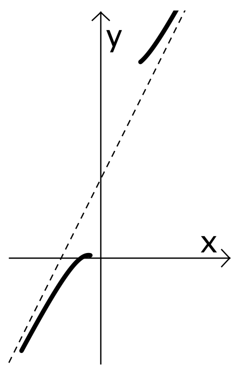
On en déduit la présence de l'asymptote Δ_λ d'équation $y = 2x + 2 - \lambda$ quand x tend vers $\pm\infty$.

Le placement est donné par le signe de $\dfrac{1-\lambda}{x}$ si $\lambda \neq 1$, et par celui de $\Big(\dfrac{1}{3} - \dfrac{\lambda}{2}\Big)\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{6x^2}$ si $\lambda = 1$.

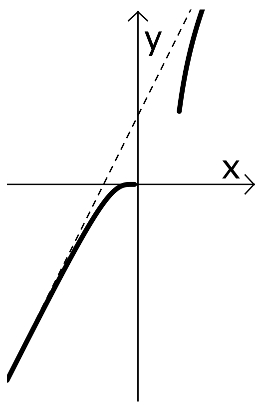
Remarque : à cause de $\lambda = 1$, on ne pouvait contenter de $f_\lambda(x) = 2x + 2 - \lambda + \dfrac{1-\lambda}{x} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$.
Voici l'allure de la courbe $y = f(x)$ dans les trois cas $\lambda > 1$, $\lambda < 1$, et $\lambda = 1$:



allure quand $\lambda > 1$



allure quand $\lambda < 1$



allure quand $\lambda = 1$

9.7 Exemples de développements asymptotiques

9.7.1 Position du problème

Considérons le développement limité usuel, quand x tend vers 0 : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^6)$.

Si on remplace x par $\sqrt{x}$, on obtient : $\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{6} + \dfrac{x^2\sqrt{x}}{24} + \mathrm{o}(x^3)$

Le résultat obtenu n'est pas un développement limité au sens qu'on a donné à ce terme (car sa partie régulière n'est pas un polynôme en x). On parle plutôt ici de « développement asymptotique ».

Plus généralement, un développement asymptotique en un point x_0 nécessite ce qu'on appelle une « échelle de comparaison ». Celle-ci est formée d'une suite de fonctions $x \mapsto \varphi_n(x)$, avec la particularité que, pour tout entier n, $\varphi_{n+1}(x)$ est négligeable devant $\varphi_n(x)$ quand x tend vers x_0.

Un développement asymptotique de f en x_0, à la précision $\mathrm{o}(\varphi_n(x))$, est alors une écriture :

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + \mathrm{o}(\varphi_n(x))$$

On note que les développements usuels en x_0 sont un cas particulier de cette situation, quand on utilise l'échelle de comparaison en x_0 définie par les $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$.

Il est également possible de définir des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Les échelles de comparaisons les plus utilisées en 0 ou en ∞ sont :

– les fonctions puissances de x ou de $\dfrac{1}{x}$ à exposant rationnel

– les fonctions puissances de $\ln x$ ou des fonctions du type $x \mapsto x^p \ln^q(x)$, avec p, q dans $\mathbb{Z}$.

Le programme de mathématiques en MPSI précise que les échelles de comparaison sont hors-programme, et qu'on doit se contenter de quelques exemples de développements asymptotiques « simples ».

9.7.2 Quelques exemples simples

Développement asymptotique, quand $x \to +\infty$, à la précision $\mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big)$, de $f(x) = \dfrac{1}{x + \ln(x)}$.

On écrit $f(x) = \dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{1}{1 + y(x)}\Big)$, avec $y(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

On peut donc utiliser le développement : $\dfrac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \mathrm{O}(y^4)$.

Ainsi $f(x) = \dfrac{1}{x}\Big(1 - \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln^2(x)}{x^2} - \dfrac{\ln^3(x)}{x^3} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{\ln^4(x)}{x^4}\Big)\Big) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x^2} + \dfrac{\ln^2(x)}{x^3} - \dfrac{\ln^3(x)}{x^4} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{\ln^4(x)}{x^5}\Big)$

Enfin, $\dfrac{\ln^4(x)}{x^5} = \dfrac{1}{x^4}\dfrac{\ln^4(x)}{x} = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big)$ quand $x \to +\infty$.

Finalement : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x^2} + \dfrac{\ln^2(x)}{x^3} - \dfrac{\ln^3(x)}{x^4} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big)$.

Il est important de noter que, dans le développement précédent, chacun des termes qui figurent dans l'échelle de comparaison est négligeable (au voisinage de $+\infty$) devant celui qui le précède (dans une lecture de gauche à droite, bien sûr).

Développement asymptotique, quand $x \to 0$, à la précision $\mathrm{o}(x^3)$, de $f(x) = \dfrac{1}{x + \ln(x)}$.

On écrit $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}\Big(\dfrac{1}{1 + y(x)}\Big)$, avec $y(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$.

On peut donc utiliser le développement : $\dfrac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \mathrm{O}(y^3)$.

Ainsi $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}\Big(1 - \dfrac{x}{\ln(x)} + \dfrac{x^2}{\ln^2(x)} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{x^3}{\ln^3(x)}\Big)\Big) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{\ln^2(x)} + \dfrac{x^2}{\ln^3(x)} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{x^3}{\ln^4(x)}\Big)$.

Enfin, $\dfrac{x^3}{\ln^4(x)} = \mathrm{o}(x^3)$ quand $x \to 0$. Finalement : $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{\ln^2(x)} + \dfrac{x^2}{\ln^3(x)} + \mathrm{o}(x^3)$.

Développement asymptotique, quand $x \to 0$, à la précision $\mathrm{o}(x^3)$, de $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

On écrit $f(x) = x^{1/4}\sqrt{1+\sqrt{x}}$, et on utilise $\sqrt{1+y} = 1 + \dfrac{y}{2} - \dfrac{y^2}{8} + \dfrac{y^3}{16} - \dfrac{5y^4}{128} + \dfrac{7y^5}{256} + \mathrm{O}(y^6)$.

Il en résulte : $\sqrt{1+\sqrt{x}} = 1 + \dfrac{x^{1/2}}{2} - \dfrac{x}{8} + \dfrac{x^{3/2}}{16} - \dfrac{5x^2}{128} + \dfrac{7x^{5/2}}{256} + \mathrm{O}(x^3)$.

Finalement : $f(x) = x^{1/4} + \dfrac{x^{3/4}}{2} - \dfrac{x^{5/4}}{8} + \dfrac{x^{7/4}}{16} - \dfrac{5x^{9/4}}{128} + \dfrac{7x^{11/4}}{256} + \mathrm{o}(x^3)$.

Développement asymptotique, quand $x \to +\infty$, à la précision $\mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$, de $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

On écrit $f(x) = \sqrt{x}\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)^{1/2}$, et on utilise $\sqrt{1+y} = 1 + \dfrac{y}{2} - \dfrac{y^2}{8} + \dfrac{y^3}{16} - \dfrac{5y^4}{128} + \dfrac{7y^5}{256} + \mathrm{o}(y^5)$.

Il en résulte : $\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{8\,x} + \dfrac{1}{16\,x\sqrt{x}} - \dfrac{5}{128\,x^2} + \dfrac{7}{256\,x^2\sqrt{x}} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\Big)$.

Finalement : $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8\sqrt{x}} + \dfrac{1}{16\,x} - \dfrac{5}{128\,x\sqrt{x}} + \dfrac{7}{256\,x^2} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$.

Déterminer un développement, quand $x \to 0$, à la précision $\mathrm{o}(x^2)$, de $f(x) = x^{\ln(1+x)}$.

On écrit : $f(x) = \exp(\ln(x)\ln(1+x)) = \exp(y(x))$, avec $y(x) = x\ln(x)\Big(1 - \dfrac{x}{2} + \mathrm{O}(x^2)\Big)$.

On a : $y(x) \underset{0}{\sim} x\ln(x)$, et en particulier : $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$.

On peut donc utiliser le développement usuel : $\mathrm{e}^y = 1 + y + \dfrac{y^2}{2} + \mathrm{O}(y^3)$ quand $y \to 0$.

On trouve $y^2(x) = x^2\ln^2(x)\Big(1 - \dfrac{x}{2} + \mathrm{O}\big(x^2\big)\Big)^2 = x^2\ln^2(x)\Big(1 - x + \mathrm{O}\big(x^2\big)\Big)$

En utilisant $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^2(x) = 0$, le développement de $y^2(x)$ s'écrit : $y^2(x) = x^2\ln^2(x) + \mathrm{o}(x^2)$.

Par ailleurs : $y(x) = x\ln(x) - \dfrac{x^2}{2}\ln(x) + \mathrm{O}\big(x^3\ln(x)\big) = x\ln(x) - \dfrac{x^2}{2}\ln(x) + \mathrm{o}(x^2)$.

Enfin, et puisque $y(x) \underset{0}{\sim} x\ln(x)$, un $\mathrm{O}(y^3)$ est un $\mathrm{O}(x^3\ln^3(x))$ donc un $\mathrm{o}(x^2)$.

Finalement, on trouve : $f(x) = 1 + x\ln(x) + \dfrac{x^2}{2}\ln^2(x) - \dfrac{x^2}{2}\ln(x) + \mathrm{o}(x^2)$.

9.7.3 Étude d'une suite définie implicitement

On se propose de résoudre l'exercice suivant :

Montrer que l'équation $\ln(x) + x = n$ possède une unique solution, notée x_n, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Déterminer a, b, c tels que : $x_n = a\,n + b\ln(n) + c\,\dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{\ln(n)}{n}\Big)$ quand $n \to +\infty$.

– Tout d'abord, l'application $x \mapsto f(x) = x + \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  Puisque $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, l'application f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe donc un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.
  Retenons que pour tout entier n, on a l'égalité (E_1) : $\ln(x_n) + x_n = n$.

– L'application réciproque f^{-1} est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  Pour tout n, on a $x_n = f^{-1}(n)$. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

– Pour tout entier n, l'égalité (E_1) s'écrit aussi (E_2) : $\dfrac{n}{x_n} = \dfrac{\ln(x_n)}{x_n} + 1$.
  Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, un passage à la limite dans (E_2) donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{x_n} = 1$ donc $x_n \sim n$.

– Posons $x_n = n + y_n$, donc $y_n = x_n - n$.
  Puisque $x_n \sim n$, cette définition nous dit que $y_n = \mathrm{o}(n)$ en $+\infty$.
  L'égalité (E_1) devient (E_3) : $\ln(n + y_n) + y_n = 0$, donc $y_n = -\ln(n + \mathrm{o}(n)) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

– Posons alors $y_n = -\ln(n) + z_n$, donc $x_n = n - \ln(n) + z_n$.
  Avec cette définition, et sachant que $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$, on a $z_n = \mathrm{o}(\ln(n))$.
  On rappelle que $\ln(x_n) + x_n = n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
  On effectue un développement de $\ln(x_n)$ quand $n \to +\infty$:
  $$\ln(x_n) = \ln(n - \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))) = \ln(n) + \ln\Bigl(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\Bigl(\frac{\ln(n)}{n}\Bigr)\Bigr) = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\Bigl(\frac{\ln(n)}{n}\Bigr)$$
  Ainsi : $x_n = n - \ln(x_n) = n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\Bigl(\dfrac{\ln(n)}{n}\Bigr)$.

– On a donc obtenu le résultat souhaité avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$.

9.7.4 Formule de Stirling

Proposition 9.7.1 (formule de Stirling)
Quand l'entier n tend vers $+\infty$, on a l'équivalent : $n! \sim n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Le résultat précédent est à connaître, mais pas sa démonstration (qui constitue un problème classique).
Puisque : $n! = (n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n})(1 + \mathrm{o}(1))$, on a le développement asympotique, quand $n \to +\infty$:
$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \mathrm{o}(1)$$

Et ce développement donne les équivalents : $\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$, ou encore $\ln\Bigl(\dfrac{n^n}{n!}\Bigr) \underset{+\infty}{\sim} n$.