Chapitre 12

Polynômes, fractions rationnelles

Sommaire

12.1 Anneau des polynômes

12.1.1 Suites à support fini de $\mathbb{K}$

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Définition 12.1.1 (suites à support fini dans $\mathbb{K}$)
On dit qu'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}$ est *à support fini* s'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ a_n = 0$.
Cela équivaut à dire que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0\}$ est fini (éventuellement vide).
On note $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ qui sont à support fini.

Soit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 5$, $a_4 = -1$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 5$.
Cette suite est à support fini, et on pourrait la noter, sans ambiguïté : $a = (1, -3, 0, 5, -1, 0...)$
Un cas très particulier est celui de la suite identiquement nulle (0...).

Définition 12.1.2 (somme de suites à support fini, et produit par un scalaire)
Soit $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ et $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites à support fini de $\mathbb{K}$. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$.
On note $a + b$ la suite de terme général $a_n + b_n$, et on note λa la suite de terme général λa_n.
Avec ces notations, les suites $a + b$ et λa sont encore à support fini.

Structure de groupe commutatif

L'ensemble $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, +)$ a une structure de groupe commutatif.
Plus précisément : l'élément neutre est la suite nulle, et la suite opposée à $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est $(-a_n)_{n\geqslant 0}$.

Combinaisons linéaires

L'opération qui à un scalaire λ et à une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite λa est appelée « loi externe ».
Avec cette opération et la loi $+$, on peut définir des *combinaisons linéaires* dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.
Par exemple :
- soit $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$, $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$ et $c = (c_n)_{n\geqslant 0}$ sont trois éléments de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$
- soit α, β, γ trois scalaires (c'est-à-dire trois éléments de $\mathbb{K}$)
- alors $d = \alpha a + \beta b + \gamma c$ désigne la suite (à support fini) dont le terme général est $d_n = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n$; on dit que d est une combinaison linéaire de a, b, c, avec les coefficients α, β, γ.

Base canonique

Pour tout m dans $\mathbb{N}$, notons $e_m = (a_n)_{n\geqslant 0}$ l'élément de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ défini par $\begin{cases} a_m = 1 \\ a_n = 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}$

Ainsi $e_0 = (1, 0...)$, $e_1 = (0, 1, 0, ...)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0...)$.

On remarque par exemple que $a = (3, 0, 1, -2, 0, 0, 4, 0...)$ s'écrit $a = 3e_0 + e_2 - 2e_3 + 4e_6$.

Plus généralement, si $a = (a_0, a_1, \ldots, a_m, 0...)$, alors $a = a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots + a_me_m = \sum_{n=0}^{m} a_ne_n$.

On notera aussi $a = \sum_{n\geqslant 0} a_ne_n$ ou $a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_ne_n$, en se souvenant que cette somme est finie.

L'écriture de a comme *combinaison linéaire* des e_n est unique, à l'ordre près. On exprime cette propriété en disant que les suites e_n forment une *base* de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ (dite « base canonique »).

Définition 12.1.3 (définition d'un produit sur les suites à support fini)
Soit $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ et $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites à support fini de $\mathbb{K}$.
On définit la suite $c = ab$ (dite suite produit de a et b) de la manière suivante :

$$c_0 = a_0b_0, \qquad c_1 = a_1b_0 + a_0b_1, \qquad c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, \qquad c_3 = a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3$$

et plus généralement : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} = \sum_{j+k=n} a_jb_k$.
Avec ces notations, la suite $c = ab$ est encore à support fini.

Remarques

– La loi produit sur $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition.
  La suite $e_0 = (1, 0...)$ est élément neutre pour ce produit.
– Pour tous indices j et k, on remarque que $e_je_k = e_{j+k}$.
  On en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $e_1^n = e_n$ (en posant $e_1^0 = e_0$).

Proposition 12.1.1
Muni des deux lois + et ×, l'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un anneau commutatif.
Les éléments de cet anneau sont appelés polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

12.1.2 L'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$

Les scalaires sont des polynômes particuliers

Pour tout scalaire λ, considérons la suite $(\lambda, 0...)$, c'est-à-dire la suite λe_0.
Pour toute suite $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}^{(N)}$, on a : $(\lambda e_0)a = \lambda a$.
Cette égalité permet d'identifier la suite λe_0 avec le scalaire λ (et donc e_0 avec 1)

Notation définitive des polynômes

On pose $\mathrm{X} = e_1 = (0, 1, 0..)$. Alors $\mathrm{X}^2 = (0, 0, 1, 0...) = e_2$, et $\mathrm{X}^3 = (0, 0, 0, 1, 0, ...) = e_3$.
Plus généralement, on a $e_n = \mathrm{X}^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ (et on complète par $\mathrm{X}^0 = e_0 = 1$).

$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (a_k)_{k\geqslant 0}$ s'écrit donc $P = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\mathrm{X}^k$

Une telle somme, toujours finie, représente P de façon unique (à l'ordre près).

Pour tout entier n tel que $(k > n \Rightarrow a_k = 0)$, on peut bien sûr noter $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$.

On dit que les a_k sont les *coefficients* du polynôme P.

Unicité des coefficients et identification

L'unicité de l'écriture $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k$ permet de procéder à des identifications.

En particulier, P est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

De même, on a l'équivalence : $\sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k = \sum_{k\geqslant 0} b_k \mathrm{X}^k \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$.

Notation définitive des opérations sur $\mathbb{K}[X]$

On notera maintenant $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Les lois sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sont donc définies par :

- le produit d'un polynôme par un scalaire : $\lambda \sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k = \sum_{k\geqslant 0} (\lambda a_k)\mathrm{X}^k$
- la somme de deux polynômes : $\sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k + \sum_{k\geqslant 0} b_k \mathrm{X}^k = \sum_{k\geqslant 0} (a_k + b_k)\mathrm{X}^k$
- le produit de deux polynômes : $\Big(\sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k\Big)\Big(\sum_{k\geqslant 0} b_k \mathrm{X}^k\Big) = \sum_{k\geqslant 0}\Big(\sum_{i+j=k} a_i\, b_j\Big)\mathrm{X}^k$

Deux cas particuliers

On dit qu'un élément P de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un *monôme* s'il s'écrit $P = \lambda \mathrm{X}^n$, avec λ dans $\mathbb{K}$ et n dans $\mathbb{N}$.

On dit que P est un *polynôme constant* si $P = \lambda$, avec λ dans $\mathbb{K}$.

L'indéterminée

Dans les notations précédentes, le polynôme très particulier X est appelée *l'indéterminée*, et $\mathbb{K}[X]$ devient l'ensemble des polynômes à une indéterminée X. Le nom X est consacré par l'usage.

On pourrait généraliser et considérer des polynômes à plusieurs indéterminées (par exemple le polynôme $P = 1 + X + 2Y - XY + X^2Y$ est un élément de $\mathbb{K}[X, Y]$) mais cela dépasse le cadre du programme.

12.1.3 Degré d'un polynôme

Définition 12.1.4 (degré d'un polynôme)
Soit $P = \sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{X}^n$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

On appelle *degré* de P, et on note $\deg(P)$, l'entier n maximum tel que $a_n \neq 0$.

Par convention, on pose $\deg(0) = -\infty$.

Exemples et remarques

- Le polynôme $P_\lambda = 1 + 3\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^5 + \lambda \mathrm{X}^7$ est de degré 7 si λ est non nul, et de degré 5 sinon.
- Si $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k$, on dit que a_k est le coefficient du terme ou du monôme de degré k dans P.

  On dit que a_0 est le coefficient *constant* de P.

- Les polynômes sont en général écrits suivant les degrés croissants de l'indéterminée X ($P = 1+3X^2+X^3-2X^5+X^7$) ou suivant les degrés décroissants ($P = X^7-2X^5+X^3+3X^2+1$). Ce choix n'est souvent qu'une question de confort (identification de coefficients, division de deux polynômes, etc.)
- Écrire que $\deg(P)$ appartient à $\mathbb{N}$ (donc $\deg(P) \neq -\infty$), c'est écrire que P est non nul.
  Écrire que $\deg(P) \geqslant 1$, c'est écrire que P n'est pas un polynôme constant.

Définition 12.1.5 (polynômes unitaires, ou normalisés)
Soit $P = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ un polynôme non nul, et soit $d = \deg(P) \geqslant 0$.
On dit que a_d est le coefficient *dominant* de P (ou coefficient du terme de plus haut degré de P).
Si $a_d = 1$, on dit que le polynôme P est *normalisé* (ou encore *unitaire*).

Définition 12.1.6 (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n)
Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes P tels que $\deg(P) \leqslant n$.

Par exemple : $\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants (donc $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$).
De même : $\mathbb{K}_1[X] = \{aX+b,\ (a,b)\in\mathbb{K}^2\}$ et $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2+bX+c,\ (a,b,c)\in\mathbb{K}^3\}$.
Un élément $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est caractérisé par les $n+1$ coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

12.1.4 Degré d'une somme ou d'un produit

On rappelle que, par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

Proposition 12.1.2 (degré d'une somme ou d'un produit)
Soit A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.
- *on a $\deg(A+B) \leqslant \max(\deg(A), \deg(B))$, avec égalité si $\deg(A) \neq \deg(B)$.*
- *on a $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$.*

- Ces résultats sont encore vrais si $A = 0$ ou $B = 0$, toujours avec la convention $\deg(0) = -\infty$.
- Si $\deg(A) = \deg(B) = n$, il est possible qu'on ait $\deg(A+B) < n$.
  Il suffit pour cela que les termes de plus haut degré de A et B se « neutralisent ».
  Par exemple, si $\begin{cases} A = X^3 + X \\ B = -X^3 + 1 \end{cases}$, alors $A + B = X + 1$, donc $\deg(A+B) = 1 < 3$.
  On peut aussi prendre l'exemple extrême $B = -A$, car alors $\deg(A+B) = -\infty$.
- Pour tout A dans $\mathbb{K}[X]$ et pour tout λ dans $\mathbb{K}$, on a $\begin{cases} \deg(\lambda A) = \deg(A) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \deg(\lambda A) = -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$
- On a $\deg(A_1 A_2 \cdots A_m) = \sum\limits_{k=1}^{m} \deg(A_k)$. En particulier $\deg(A^m) = m \deg(A)$.
  Pour tous scalaires λ_k, on a $\deg\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k A_k\Big) \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} (\deg(A_k))$.
  Dans ce dernier résultat, si l'un des A_k est de degré strictement supérieur aux autres et si le coefficient λ_k correspondant est non nul, alors il y a égalité.

Proposition 12.1.3 (le produit de deux polynômes non nuls est non nul)
L'égalité $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$ *montre que si* $A \neq 0$ *et* $B \neq 0$ *alors* $AB \neq 0$.
Autrement dit : $AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$.
Plus généralement, si $A_1 A_2 \ldots A_n = 0$, *alors l'un au moins des* A_k *est nul.*

Une conséquence importante est que tout polynôme non nul est *simplifiable pour le produit.*
En effet, si A, B, C sont des polynômes et si $A \neq 0$, alors : $AB = AC \Rightarrow A(B - C) = 0 \Rightarrow B = C$.

Proposition 12.1.4 (polynômes inversibles pour le poduit)
Soit A *et* B *deux éléments de* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
On a $AB = 1$ *si et seulement si* A *et* B *sont des constantes inverses l'une de l'autre.*
Autrement dit, les seuls éléments inversibles pour le produit dans l'anneau $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *sont les polynômes de degré* 0, *c'est-à-dire les polynômes constants non nuls.*

12.1.5 Composition de deux polynômes

Définition 12.1.7 (composition de deux polynômes)
Soit $A = \sum_{n \geqslant 0} a_n \mathrm{X}^n$ un élément de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Pour tout polynôme B, on pose $A(B) = \sum_{n \geqslant 0} a_n B^n$.
On dit que $A(B)$ est le *composé* du polynôme B par le polynôme A.

Par exemple, posons $A = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + 1$ et $B = \mathrm{X}^2 - 1$.
Alors $A(B) = B^3 + B + 1 = (\mathrm{X}^2 - 1)^3 + (\mathrm{X}^2 - 1) + 1 = \mathrm{X}^6 - 3\mathrm{X}^4 + 4\mathrm{X}^2 - 1$.
De même $B(A) = A^2 - 1 = (\mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + 1)^2 - 1 = \mathrm{X}^6 + 2\mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}$.

Proposition 12.1.5 (degré du composé de deux polynômes)
Soit A *et* B *deux polynômes non nuls.*
Soit $A(B)$ *le polynôme composé de* B *par* A. *Alors* $\deg(A(B)) = \deg(A)\deg(B)$.

Remarques et propriétés
Si $B = \mathrm{X}$, alors $A(B) = A$. Ceci justifie qu'on note souvent $A(\mathrm{X})$ un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
Un cas classique est le calcul des polynômes $A(\mathrm{X} + h)$, appelés *translatés* du polynôme A.
Par exemple : $A = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + 1 \Rightarrow A(\mathrm{X} + 1) = a\mathrm{X}^2 + (2a + b)\mathrm{X} + a + b + 1$.
Pour tous polynômes A, B, C, et pour tous scalaires λ, μ, on a $\begin{cases} (\lambda A + \mu B)(C) = \lambda A(C) + \mu B(C) \\ (AB)(C) = A(C)B(C) \end{cases}$

12.1.6 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples

Définition 12.1.8 (multiples et diviseurs)
Soit A et B deux éléments de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On dit que B est un *diviseur* de A, ou encore que A est un *multiple* de B, et on note $B \mid A$, s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.
On note $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des diviseurs du polynôme A, et $A\,\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ l'ensemble de ses multiples.

Unicité du « quotient exact » quand il y a divisibilité

Si $A = BQ$ avec $B \neq 0$, alors Q (le *quotient exact* de A par B) est défini de façon unique.

Étant donnés deux polynômes A, B, avec $B \neq 0$, il est exceptionnel que B divise A.

Si cela se produit, on évitera de noter $\dfrac{A}{B}$ leur quotient exact.

Cas particuliers des polynômes 0 et 1

Pour tout polynôme B, on a $0 = QB$ avec $Q = 0$. Le polynôme nul est donc un multiple de tout polynôme B (ou encore : tout polynôme B de $\mathbb{K}[X]$ divise le polynôme nul). Ainsi $\mathcal{D}(0) = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

En revanche le polynôme nul ne divise que lui-même (car $A = Q0 \Rightarrow A = 0$), donc $0\mathbb{K}[\mathrm{X}] = \{0\}$.

L'égalité évidente $B = 1A$ dit que le polynôme constant 1 divise tout polynôme B, ou encore que tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est multiple du polynôme 1. Ainsi $1\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]$.

Mais seuls les polynômes constants non nuls divisent le polynôme 1 (car $B \mid 1$ signifie que B est inversible pour le produit, ou encore : $BQ = 1 \Rightarrow \deg(B) = 0$). Ainsi $\mathcal{D}(1) = \mathbb{K}^*$.

12.1.7 Polynômes associés

En posant $A \mid B$, on définit une relation binaire sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
Cette relation est réflexive (on a toujours $A \mid A$) et transitive (si $A \mid B$ et $B \mid C$ alors $A \mid C$).
Cette relation est loin d'être symétrique (si $A \mid B$, on n'a généralement pas $B \mid A$).

Elle n'est pas antisymétrique car $(A \mid B \text{ et } B \mid A) \not\Rightarrow A = B$, et la définition suivante précise ce point :

Définition 12.1.9 (polynômes associés)
On dit que deux polynômes A et B sont *associés* si A divise B et si B divise A.

Proposition 12.1.6 (caractérisation des couples de polynômes associés)
Soit (A, B) un couple de polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
Alors A et B sont associés si et seulement si il existe un scalaire non nul λ tel que $B = \lambda A$.

Définition 12.1.10 (normalisé d'un polynôme non nul)
Soit A un polynôme non nul, et soit a_d son coefficient de plus haut degré.

Le polynôme unitaire $A^* = \dfrac{1}{a_d}A$ est appelé le *normalisé* du polynôme A.

Quelques propriétés

– Dire que deux polynômes non nuls sont associés, c'est dire qu'ils ont le même normalisé.

– Si deux polynômes unitaires A et B se divisent mutuellement, alors ils sont égaux.

– Pour tous polynômes A, B, on a les équivalences : $A\,\mathbb{K}[\mathrm{X}] \subset B\,\mathbb{K}[\mathrm{X}] \;\Leftrightarrow\; B \mid A \;\Leftrightarrow\; \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$.
  On en déduit, pour A, B non nuls : $A\,\mathbb{K}[\mathrm{X}] = B\,\mathbb{K}[\mathrm{X}] \;\Leftrightarrow\; A^* = B^* \;\Leftrightarrow\; \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

– Soit A un polynôme non nul, et soit A^* son normalisé.
  Alors A^* est l'unique polynôme unitaire tel que $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$.
  De même A^* est l'unique polynôme unitaire tel que $A\mathbb{K}[\mathrm{X}] = A^*\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

12.1.8 Théorème de la division euclidienne

Proposition 12.1.7 (division euclidienne des polynômes)
Soit A et B deux éléments de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tels que $\begin{cases} A = QB + R \\ \deg(R) < \deg B \end{cases}$
Le passage du couple (A,B) au couple (Q,R) s'appelle division euclidienne *de A par B.*
Dans cette division, A est le dividende*, B le* diviseur*, Q le* quotient *et R le* reste*.*

Remarques

Il ne faut jamais oublier de mentionner la condition $\deg(R) < \deg(B)$.

Si $\deg(A) < \deg(B)$, la division euclidienne de A par B s'écrit $A = 0B + A$.

Si $B \neq 0$, dire que B divise A, c'est dire que le reste dans la division de A par B est nul.

Un exemple de division euclidienne

On divise ici le polynôme $A = \mathrm{X}^5 + 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 3$ par le polynôme $B = \mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|rrrrrrr}
\mathrm{X}^5 & & & + & 2\mathrm{X}^3 & - & \mathrm{X}^2 & - & 4\mathrm{X} & + & 3 & \mathrm{X}^2 & + & 3\mathrm{X} & + & 1 & & \\ \cline{12-18}
 & - & 3\mathrm{X}^4 & + & \mathrm{X}^3 & - & \mathrm{X}^2 & - & 4\mathrm{X} & + & 3 & \mathrm{X}^3 & - & 3\mathrm{X}^2 & + & 10\mathrm{X} & - & 28 \\
 & & & & 10\mathrm{X}^3 & + & 2\mathrm{X}^2 & - & 4\mathrm{X} & + & 3 & & & & & & & \\
 & & & & & - & 28\mathrm{X}^2 & - & 14\mathrm{X} & + & 3 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 70\mathrm{X} & + & 31 & & & & & & &
\end{array}
$$

Ainsi $A = BQ + R$ avec $Q = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 10\mathrm{X} - 28$ et $R = 70\mathrm{X} + 31$.

Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$

Soit A, B deux éléments de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, le polynôme B étant non nul.
Soit $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Par unicité, cette égalité représente aussi la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
Cette propriété est souvent utilisée de la manière suivante : on part d'une division euclidienne dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, et on la considère momentanément comme une division dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, ce qui permet de substituer à X des valeurs complexes (notamment des racines complexes de B, voir plus loin).

12.2 Fonctions polynomiales, racines

12.2.1 Fonction polynomiale associée

Définition 12.2.1 (fonction polynomiale associée à un polynôme)
Soit $A = \sum_{k \geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k$ un élément de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Pour tout x de $\mathbb{K}$, on pose $A(x) = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$.

On dit que $A(x)$ est la *valeur* du polynôme A en x.

On dit que la fonction $x \mapsto A(x)$ est la *fonction polynomiale* associée au polynôme A.

On note souvent $\widetilde{A}$ cette fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, pour la distinguer du polynôme A lui-même.

Différence entre polynôme et fonction polynomiale

Un polynôme A de $\mathbb{K}[X]$ tel que nous l'avons défini, est un objet « formel ».

La fonction polynomiale $\widetilde{A}$ qui lui est associée est une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

On ne doit donc pas confondre A et $\widetilde{A}$, même si l'égalité $A(\lambda) = \widetilde{A}(\lambda)$ recèle une ambiguïté.

Quand on envisage $A(\lambda)$, il ne faut pas dire qu'on donne à X la valeur λ (ou qu'on pose $X = \lambda$) car ça n'a pas de sens : X est un polynôme de degré 1 et il ne saurait être égal à la constante λ.

En fait, il s'agit d'une simple substitution : on se contente de remplacer X par λ.

Pour éviter toute ambiguïté, il est d'usage d'utiliser le nom X quand on parle de polynômes et la variable x quand on parle de fonctions polynomiales.

Remarques et propriétés

- Si A est un polynôme, alors $A(0)$ est le coefficient constant de A.
  De même, $A(1)$ représente la somme des coefficients de A.
- La fonction polynomiale associée au polynôme constant λ est la fonction constante $x \mapsto \lambda$.
  La fonction polynomiale associée au polynôme X est la fonction identité $x \mapsto x$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
- On rappelle qu'on note $\widetilde{A}$ la fonction polynomiale associée à un polynôme A.
  Avec ces notations, et pour tous A, B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on a $\widetilde{A+B} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$ et $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\,\widetilde{B}$.
  De même, pour tous polynômes A et B, on vérifie que $\widetilde{A(B)} = \widetilde{A} \circ \widetilde{B}$.

Valeurs en un point de $\mathbb{C}$ d'un polynôme réel

Soit A dans $\mathbb{R}[X]$. On peut considérer A comme un élément particulier de $\mathbb{C}[X]$.

Alors pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $A(\overline{z}) = \overline{A(z)}$.

Plus généralement, soit $A = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Posons $\overline{A} = \sum\limits_{n\geqslant 0} \overline{a_n}\, X^n$.

Pour tous A, B dans $\mathbb{C}[X]$ et α, β dans $\mathbb{C}$, on a alors : $\overline{\alpha A + \beta B} = \overline{\alpha}\,\overline{A} + \overline{\beta}\,\overline{B}$ et $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$.

12.2.2 Racines (ou zéros) d'un polynôme

Proposition 12.2.1 (division euclidienne par $X - \alpha$)
Soit A un élément de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et soit α un scalaire.
Le reste dans la division de A par le polynôme $\mathrm{X} - \alpha$ est le scalaire $A(\alpha)$.

Plus généralement si $A = QB + R$ et si $B(\alpha) = 0$ alors $A(\alpha) = R(\alpha)$.

Supposons par exemple qu'on veuille calculer $A(\alpha)$ avec $\deg(A) \geqslant 2$ et $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Il est sans doute plus commode de diviser A par $B = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 3$ car $B(\alpha) = 0$.

Le reste R dans cette division s'écrit en effet $R = a\mathrm{X} + b$ et on a alors $A(\alpha) = a\alpha + b$.

Définition 12.2.2 (racine (ou zéro) d'un polynôme)
Soit A un élément de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et α un élément de $\mathbb{K}$.
On dit que α est une *racine* (ou encore un *zéro*) du polynôme A si $A(\alpha) = 0$.
Cela équivaut à dire que A est divisible par le polynôme $\mathrm{X} - \alpha$.

Définition 12.2.3 (racines simples, racines multiples)

Soit A un polynôme non nul et soit α une racine de A dans $\mathbb{K}$.

On appelle *multiplicité* de α (comme racine de A) l'entier $m \geqslant 1$ tel que $\begin{cases} (\mathrm{X}-\alpha)^m \mid A \\ (\mathrm{X}-\alpha)^{m+1} \nmid A \end{cases}$

– si $m = 1$, c'est-à-dire si $(\mathrm{X}-\alpha) \mid A$ mais $(\mathrm{X}-\alpha)^2 \nmid A$ on dit que α est une *racine simple* de A.

– si $m > 1$, c'est-à-dire si $(\mathrm{X}-\alpha)^2 \mid A$, on dit que α est une *racine multiple* de A.

– si $m = 2$ (resp. $m = 3$) on dit que α est une *racine double* (resp. une *racine triple*) de A.

Proposition 12.2.2 (une caractérisation de la multiplicité)

Soit A dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, soit α dans $\mathbb{K}$, et m dans $\mathbb{N}$.

Alors α est racine de A avec la multiplicité $m \Leftrightarrow \exists\, B \in \mathbb{K}[\mathrm{X}],\ A = (\mathrm{X}-\alpha)^m B$, avec $B(\alpha) \neq 0$

Remarques

Si α n'est pas racine de A, il est commode de dire que α est « racine de A avec la multiplicité 0 ».

Si α est une racine de multiplicité m de A, alors nécessairement $m \leqslant \deg(A)$.

Dire que A est divisible par $(\mathrm{X}-\alpha)^m$, c'est dire que α est racine de A avec une multiplicité $\geqslant m$.

Dépendance par rapport au corps des coefficients

Il faut toujours préciser dans quel « corps de coefficients » on cherche les racines d'un polynôme.

Par exemple, si on considère $A = (\mathrm{X}^2-2)(\mathrm{X}^2+1)$: le polynôme A n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$, ses racines dans $\mathbb{R}$ sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, et ses racines dans $\mathbb{C}$ sont $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $-i$, et i.

Proposition 12.2.3 (racines complexes d'un polynôme à coefficients réels)

Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Soit α une racine de A dans $\mathbb{C}$ de multiplicité m.

Alors $\overline{\alpha}$ est une racine de A dans $\mathbb{C}$, avec la même multiplicité m.

12.2.3 Nombre maximum de racines d'un polynôme

Quand on dénombre les racines d'un polynôme A, on peut soit considérer les racines distinctes de A (indépendamment de leur multiplicité) soit au contraire compter chaque racine autant de fois que sa multiplicité. Ainsi une racine double sera comptée deux fois, une racine triple trois fois, etc.

Proposition 12.2.4 (racines, multiplicités et factorisations)

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ dans $\mathbb{K}$, distincts deux à deux. Soit $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dans $\mathbb{N}$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

– pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$, α_k est racine de A avec la multiplicité m_k.

– il existe Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $A = Q \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X}-\alpha_k)^{m_k}$, avec pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$, $Q(\alpha_k) \neq 0$.

Proposition 12.2.5 (nombre maximum de racines d'un polynôme)
Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, de degré $n \geqslant 0$.
Le polynôme A admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité.
En particulier, A admet au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.

12.2.4 Polynômes scindés

Proposition 12.2.6 (polynômes scindés)
Soit A dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, de degré $n \geqslant 1$.
Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ses racines distinctes dans $\mathbb{K}$.
Soit $m_1, m_2, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives (les $m_k \geqslant 1$).
On suppose que $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ (autrement dit on suppose que A admet n racines dans $\mathbb{K}$, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité).
Alors $A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k}$, où λ est le coefficient dominant de A.
On exprime cette situation en disant que le polynôme A est scindé *dans $\mathbb{K}$.*

Dire que A est scindé dans $\mathbb{K}$ c'est dire que A s'écrit sous la forme d'un produit $A = \lambda \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - \beta_k)$ de facteurs de degré 1, où $n = \deg(A)$ et où $\beta_1, \ldots \beta_n$ sont les racines (distinctes ou non) de A dans $\mathbb{K}$.

Proposition 12.2.7 (théorème de d'Alembert-Gauss (admis))
Tout polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, de degré $n \geqslant 1$, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
On exprime cette propriété en disant que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Proposition 12.2.8 (nombre de racines d'un polynôme à coefficients complexes)
Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, tout polynôme non constant est scindé.
Ainsi tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité.

12.2.5 Identification entre polynômes et fonctions polynomiales

Proposition 12.2.9
Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, de degré inférieur ou égal à n.
On suppose que A s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.
Alors A est le polynôme nul.

Proposition 12.2.10
Soit A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, de degré inférieur ou égal à n.
On suppose que A et B prennent la même valeur en au moins $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.
Alors les polynômes A et B sont identiques (autrement dit : ils ont les mêmes coefficients.)

Conséquence importante

Soit A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si les fonctions polynomiales $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont égales, alors les polynômes A et B sont égaux.

Il suffit d'ailleurs que l'égalité $\widetilde{A}(x) = \widetilde{B}(x)$ soit vraie sur une partie infinie de l'ensemble $\mathbb{K}$ pour qu'on ait l'égalité *formelle* des deux polynômes A et B (c'est-à-dire l'égalité de leurs coefficients).

En d'autres termes, l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ qui à un polynôme A associe la fonction polynomiale $\widetilde{A}$ est injective (elle réalise donc une bijection de $\mathbb{K}[X]$ sur son image, c'est-à-dire sur l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales).

La fonction polynomiale $\widetilde{A}$ est par définition connue dès qu'on connaît A. Les remarques précédentes disent que réciproquement, un polynôme A (c'est-à-dire ses *coefficients*) est entièrement déterminé par la fonction polynomiale associée $\widetilde{A}$ (c'est-à-dire par l'ensemble des *valeurs* de A).

12.2.6 Relations entre coefficients et racines

Définition 12.2.4 (fonctions symétriques élémentaires)

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une famille de n éléments de $\mathbb{K}$.

Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, on note $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ (somme des produits k à k)

En particulier : $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sigma_2 = \displaystyle\sum_{i<j} x_i\, x_j$ (somme des produits deux à deux) et $\sigma_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i$

Les quantités précédentes sont appelées *fonctions symétriques élémentaires* de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Exemples et remarques

Chaque expression σ_k est une somme de $\binom{n}{k}$ termes.

Les fonctions symétriques élémentaires de a, b sont $\sigma_1 = a + b$ et $\sigma_2 = ab$.

Celles de a, b, c sont $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + ac + bc$ et $\sigma_3 = abc$.

Celles de a, b, c, d sont : $\begin{cases} \sigma_1 = a + b + c + d, & \sigma_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd \\ \sigma_3 = abc + abd + acd + bcd, & \sigma_4 = abcd \end{cases}$

Fonctions symétriques, élémentaires ou non

Soit s une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et soit k un élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

On a $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_k(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)})$, ce qui justifie le nom de « fonctions symétriques ».

Elles sont dites « élémentaires » parce que de nombreuses autres fonctions symétriques de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent s'écrire en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

Ainsi $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, ou encore $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$.

Proposition 12.2.11 (relations coefficients-racines, pour un polynôme scindé)

Soit $A = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$ *un polynôme de* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, *avec* $\deg(A) = n \geqslant 1$.

On écrit $A = a_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_k)$ *où* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *sont les racines (non nécessairement distinctes) de* A.

Soit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *les fonctions symétriques élémentaires de* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Alors on a les égalités : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ \sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.

Exemples

– si $P = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = a(\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta)$, alors $\sigma_1 = \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ et $\sigma_2 = \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$.

– si $P = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d = a(\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta)(\mathrm{X}-\gamma)$, alors :

$$\sigma_1 = \alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a},\quad \sigma_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = \frac{c}{a},\quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

Proposition 12.2.12 (utilisation des valeurs des fonctions symétriques élémentaires)
Soit $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires de n scalaires $x_1,\ldots,x_n$.
L'ensemble $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ est égal à l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n\sigma_n = 0.$$

Exemples

– Soit (E) l'équation $t^2 - St + P = 0$, d'inconnue t dans $\mathbb{K}$.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{K}$. On a : $\{x,y\} = \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = S \\ xy = P \end{cases}$

– Soit (E) l'équation $t^3 - St^2 + \lambda t - P = 0$, d'inconnue t dans $\mathbb{K}$.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{K}$.
On a $\{x,y,z\} = \mathcal{S}$ si et seulement si le triplet (x,y,z) est solution du système $\begin{cases} x+y+z = S \\ xy+xz+yz = \lambda \\ xyz = P \end{cases}$

Un exemple d'utilisation des fonctions symétriques élémentaires

On considère le polynôme $A = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 2$. Soit α,β,γ ses racines dans $\mathbb{C}$.

On se propose de calculer les sommes $S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$, pour n dans $\mathbb{N}$.

On a tout d'abord $S_0 = 3$, $S_1 = \sigma_1 = -1$, $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -5$.

On a $\begin{cases} \alpha^3+\alpha^2+3\alpha+2 = 0 \\ \beta^3+\beta^2+3\beta+2 = 0 \\ \gamma^3+\gamma^2+3\gamma+2 = 0 \end{cases}$ puis, pour tout $n \geqslant 3$: $\begin{cases} \alpha^n+\alpha^{n-1}+3\alpha^{n-2}+2\alpha^{n-3} = 0 \\ \beta^n+\beta^{n-1}+3\beta^{n-2}+2\beta^{n-3} = 0 \\ \gamma^n+\gamma^{n-1}+3\gamma^{n-2}+2\gamma^{n-3} = 0 \end{cases}$

On en déduit, après addition terme à terme : $\forall\, n \geqslant 3,\ S_n = -S_{n-1} - 3S_{n-2} - 2S_{n-3}$.

Ainsi $S_3 = -S_2 - 3S_1 - 2S_0 = 2$, $S_4 = -S_3 - 3S_2 - 2S_1 = 15$, etc.

12.3 Dérivation des polynômes

12.3.1 Dérivée formelle d'un polynôme

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 12.3.1 (polynôme dérivé formel)
Soit $A = \sum_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k$ dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Le polynôme $A' = \sum_{k\geqslant 0}(k+1)a_{k+1}\mathrm{X}^k$ est appelé *polynôme dérivé* de A.

Il s'agit ici d'une dérivée « formelle », c'est-à-dire purement symbolique.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la fonction polynomiale associée au polynôme A' est bien la dérivée (au sens habituel donné à ce nom) de la fonction polynomiale associée à A.

En revanche si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ça n'a aucun sens de parler de fonction dérivée.

Remarques et propriétés

– Si $A = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d$ alors $A' = 3a\mathrm{X}^2 + 2b\mathrm{X} + c$.

– Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k$, alors $A' = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}\mathrm{X}^k$, ou encore $A' = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\mathrm{X}^{k-1}$.

– Si $\deg(A) \geqslant 1$ on a $\deg(A') = \deg(A) - 1$.
Pour cette raison, A' est le polynôme nul si et seulement si A est un polynôme constant.
Plus généralement : $\forall\,(A,B) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2,\ A' = B' \iff \exists\,\lambda \in \mathbb{K},\ A = B + \lambda$.

Définition 12.3.2 (polynômes dérivés successifs)
Soit A dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On définit les polynômes dérivés successifs de A en posant $\begin{cases} A^{(0)} = A \\ \forall\, m \in \mathbb{N},\, A^{(m+1)} = (A^{(m)})' \end{cases}$
On dit que $A^{(m)}$ est le polynôme dérivé m-ième de A.

On note bien sûr A' et A'' plutôt que $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$.

Proposition 12.3.1 (polynômes dérivés d'une combinaison linéaire)
Soit A, B dans $\mathbb{K}[X]$, et α, β dans $\mathbb{K}$. Pour tout m de $\mathbb{N}$, on a $(\alpha A + \beta B)^{(m)} = \alpha A^{(m)} + \beta B^{(m)}$.

Si $m \leqslant k$, on a $(\mathrm{X}^k)^{(m)} = k(k-1)\cdots(k-m+1)\mathrm{X}^{k-m} = \dfrac{k!}{(k-m)!}\mathrm{X}^{k-m}$.
En particulier, $(\mathrm{X}^m)^{(m)} = m!$, et $(\mathrm{X}^k)^{(m)} = 0$ si $m > k$.
Plus généralement, si $A = \sum_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k$, alors $A^{(m)} = \sum_{k\geqslant m} \dfrac{k!}{(k-m)!}\, a_k\mathrm{X}^{k-m} = \sum_{k\geqslant 0} \dfrac{(k+m)!}{k!}\, a_{k+m}\mathrm{X}^k$.

Dérivation et degré

Si $m \leqslant \deg(A)$, alors $\deg(A^{(m)}) = \deg(A) - m$, mais si $m > \deg A$ alors $A^{(m)} = 0$.
On a donc $A^{(m)} = 0$ si et seulement si A est un polynôme de degré strictement inférieur à m.
Si $A = \sum_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k$ est de degré n, alors $A^{(n)}$ est le polynôme constant $n!\, a_n$.

Proposition 12.3.2 (formule de Leibniz pour les polynômes)
Soit A, B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, et m dans $\mathbb{N}$. On a $(AB)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \dbinom{m}{k} A^{(k)}B^{(m-k)}$.

On retrouve $(AB)' = A'B + AB'$, mais on a aussi $\begin{cases} (AB)'' = A''B + 2A'B' + AB'' \\ (AB)''' = A'''B + 3A''B' + 3A'B'' + AB''' \end{cases}$

On se méfiera de l'analogie entre $(AB)^{(n)}$ dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $(a+b)^n$ dans $\mathbb{K}$.
En effet on a $A^{(0)} = A$ et $B^{(0)} = B$ « aux extrémités », alors que dans $\mathbb{K}$ on a $a^0 = b^0 = 1$.

12.3.2 Formule de Taylor polynomiale

Proposition 12.3.3 (formule de Taylor en un point)
Soit $A = \sum_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k$ un élément de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, et soit λ un élément de $\mathbb{K}$.
On a l'égalité : $A = A(\lambda) + A'(\lambda)(\mathrm{X}-\lambda) + \dfrac{A''(\lambda)}{2!}(\mathrm{X}-\lambda)^2 + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} \dfrac{A^{(k)}(\lambda)}{k!}(\mathrm{X}-\lambda)^k$

Remarques

La somme précédente est finie, et si $\deg(A) = n$ son dernier terme est $\dfrac{A^{(n)}(\lambda)}{n!}(\mathrm{X}-\lambda)^n$.

La formule de Taylor montre qu'un polynôme est déterminé par ses dérivées successives en un point.

Le cas particulier $\lambda = 0$ est connu sous le nom de *formule de Mac Laurin*.

Si $A = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k$, cette formule s'écrit $A = \sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{A^{(k)}(0)}{k!}\,\mathrm{X}^k$. Ainsi : $\forall\, k \geqslant 0, a_k = \dfrac{A^{(k)}(0)}{k!}$.

On a l'équivalence : $A(\mathrm{X}) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{A^{(k)}(\lambda)}{k!}(\mathrm{X}-\lambda)^k \;\Leftrightarrow\; A(\mathrm{X}+\lambda) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{A^{(k)}(\lambda)}{k!}\mathrm{X}^k$.

Un exemple

On considère le polynôme $A = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} + 1$ et le scalaire $\lambda = 2$:

On trouve $A' = 4\mathrm{X}^3 + 6\mathrm{X}^2 - 1$, puis $A'' = 12\mathrm{X}^2 + 12X$, $A^{(3)} = 24\mathrm{X} + 12$, $A^{(4)} = 24$ et $A^{(5)} = 0$.

Ainsi $A(2) = 31$, $A'(2) = 55$, $A''(2) = 72$, $A^{(3)}(2) = 60$ $A^{(4)}(2) = 24$ et $A^{(n)}(2) = 0$ pour $n \geqslant 5$.

La formule de Taylor de A au point 2 s'écrit donc :

$$\begin{aligned} A(X) &= A(2) + A'(2)(X-2) + \frac{A''(2)}{2!}(X-2)^2 + \frac{A^{(3)}(2)}{3!}(X-2)^3 + \frac{A^{(4)}(2)}{4!}(X-2)^4 \\ &= 31 + 55(X-2) + 36(X-2)^2 + 10(X-2)^3 + (X-2)^4 \end{aligned}$$

On aurait tout aussi bien pu écrire :

$$\begin{aligned} A(X+2) &= (\mathrm{X}+2)^4 + 2(\mathrm{X}+2)^3 - (\mathrm{X}+2) + 1 \\ &= (\mathrm{X}^4 + 8\mathrm{X}^3 + 24\mathrm{X}^2 + 32\mathrm{X} + 16) + 2(\mathrm{X}^3 + 6\mathrm{X}^2 + 12\mathrm{X} + 8) - (\mathrm{X}+2) + 1 \\ &= \mathrm{X}^4 + 10\mathrm{X}^3 + 36\mathrm{X}^2 + 55\mathrm{X} + 31 \end{aligned}$$

et on retrouve : $A(X) = 31 + 55(X-2) + 36(X-2)^2 + 10(X-2)^3 + (X-2)^4$.

Proposition 12.3.4 (caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives)
Soit A dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, α dans $\mathbb{K}$, et m dans $\mathbb{N}$.

Alors α est racine de A avec la multiplicité m $\Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha) = A'(\alpha) = \cdots = A^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ A^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

La multiplicité d'une racine α de A est donc l'ordre de la première dérivée non nulle en α.

Exemples

α est racine simple $\Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha) = 0 \\ A'(\alpha) \neq 0 \end{cases}$ $\qquad$ α est racine multiple $\Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha) = 0 \\ A'(\alpha) = 0 \end{cases}$

α est racine double $\Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha) = A'(\alpha) = 0 \\ A''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$ $\qquad$ α est racine triple $\Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha) = A'(\alpha) = A''(\alpha) = 0 \\ A'''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Proposition 12.3.5 (racines de A et racines de A')
Soit A dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, α dans $\mathbb{K}$, et m dans $\mathbb{N}$.
Si α est racine de A de multiplicité $m \geqslant 1$, alors α est racine de A' de multiplicité $m-1$.
Si α est racine de A' de multiplicité m, et si $A(\alpha) = 0$, alors α est racine de A de multiplicité $m+1$.

12.4 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

12.4.1 Pgcd de deux polynômes A et B

Rappelons que l'ensemble des diviseurs du polynôme nul est $\mathcal{D}(0) = \mathbb{K}[X]$.
En revanche, si $A \neq 0$, tous les polynômes de $\mathcal{D}(A)$ sont de degré inférieur ou égal à $\deg(A)$.

Dans la suite, on considère deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ *dont l'un au moins est non nul.*
Il en résulte que $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ contient des polynômes non nuls (par exemple le polynôme 1), mais que ceux-ci sont tous de degré inférieur ou égal à $\min(\deg(A), \deg(B))$.

Définition 12.4.1 (pgcd de A et B, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$)
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, dont l'un au moins est non nul.
L'ensemble des diviseurs communs à A et B possède des polynômes de degré maximum $d \geqslant 0$.
Tout polynôme D de $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ et de degré d est appelé *un* pgcd de A et de B.

Contrairement au pcgd des entiers, le pgcd de deux polynômes n'est pas défini de façon unique.
Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 12.4.1 (le pgcd est défini « à association près »)
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, dont l'un au moins est non nul.
Soit D un pgcd de A et B. Soit Δ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
Alors Δ est un pcgd de A et B si et seulement si D et Δ sont associés.
En particulier, A et B possèdent un pcgd unitaire et un seul. Celui est noté $A \wedge B$.

Premières propriétés

Rappelons qu'on note A^* le normalisé d'un polynôme A non nul.

Pour tous polynômes A et B, on a : $A \wedge B = B \wedge A$, $A \wedge 0 = A^*$ (si $A \neq 0$), et $A \wedge 1 = 1$.

On a l'égalité $A \wedge B = A^*$ si et seulement si A est un diviseur de B.

Le polynôme $A \wedge B$, et ses diviseurs, sont des diviseurs communs à A et B.

On verra que la réciproque est vraie : les diviseurs communs à A et B sont aussi des diviseurs de $A \wedge B$.

On peut (éventuellement) poser $0 \wedge 0 = 0$.

12.4.2 Algorithme d'Euclide

Proposition 12.4.2 (pgcd et division euclidienne)
Soit A, B et Q trois polynômes.
Alors $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(A - QB)$
Autrement dit, les diviseurs communs de A et B sont exactement ceux de B et $A - QB$.
En particulier, si R est le reste dans la division de A par B, on a $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R)$.

Un application répétée de ce principe conduit à l'algorithme d'Euclide :

Proposition 12.4.3 (algorithme d'Euclide)
Soit A et B deux polynômes non nuls. On veut calculer $A \wedge B$.
On forme une suite finie de polynômes R_k, à commencer par $R_0 = A$ et $R_1 = B$.
Soit $k \geqslant 1$. On suppose que R_{k-1} et R_k sont connus.
Si R_k est non nul, on note $R_{k-1} = Q_k R_k + R_{k+1}$ la division euclidienne de R_{k-1} par R_k.
Sous l'hypothèse $R_k \neq 0$, on a donc défini R_{k+1}, avec $0 \leqslant \deg(R_{k+1}) < \deg(R_k)$.
La suite de polynômes $(R_k)_{k\geqslant 1}$ est finie car la suite de leurs degrés est strictement décroissante.
Il existe donc un n de $\mathbb{N}$ tel que $R_n \neq 0$ et $R_{n+1} = 0$.
Avec ces notations, on a : $A \wedge B = R_n^*$.
Ainsi $A \wedge B$ est le normalisé du dernier reste non nul dans cette succession de divisions.

On peut considérer l'algorithme d'Euclide comme une nouvelle définition du pgcd (c'est le normalisé du dernier reste non nul dans la succession des divisions).
Les propriétés suivantes sont alors des conséquences de cette définition algorithmique.
On sait par exemple (depuis la toute première définition) que le polynôme $A \wedge B$ divise A et B.
Mais l'algorithme d'Euclide donne la réciproque : si un polynôme divise A et B, alors il divise leur pgcd.
On aboutit ainsi à la caractérisation suivante du polynôme unitaire $D = A \wedge B$:

Proposition 12.4.4 (caractérisation du pgcd)
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, dont l'un au moins est non nul. Soit $D = A \wedge B$.
Le polynôme D est le seul polynôme unitaire tel que $\mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.

La proposition suivante montre qu'on peut effectuer une mise en facteur (ou une simplification par un facteur commun) dans un calcul de pgcd.

Proposition 12.4.5 (mise en facteur dans un calcul de pgcd)
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, dont l'un au moins est non nul.
Pour tout polynôme non nul C, on a l'égalité : $(CA) \wedge (CB) = C^* \, (A \wedge B)$.

12.4.3 Relation de Bézout

Proposition 12.4.6 (relation de Bézout entre deux polynômes)
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, dont l'un au moins est non nul.
Alors il existe des polynômes U_0 et V_0 tels que $A \wedge B = AU_0 + BV_0$.
Un telle égalité s'appelle une relation de Bézout *entre A et B.*
On dit que le couple (U_0, V_0) constitue un couple de coefficients de Bézout *de A et B.*

Proposition 12.4.7 (combinaisons $AU + BV$ de deux polynômes A et B)
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, dont l'un au moins est non nul.
L'ensemble $\{AU + BV,\ U \in \mathbb{K}[X],\ V \in \mathbb{K}[X]\}$ est exactement égal à l'ensemble des multiples de $A \wedge B$.

Recherche d'un couple de coefficients de Bézout

Pour trouver un couple de coefficients de Bézout de deux polynômes non nuls A et B, il suffit de « remonter les calculs » dans l'algorithme d'Euclide (s'inspirer de ce qui a été fait avec les entiers).

12.4.4 Ppcm de deux polynômes

Dans la suite, on considère deux polynômes non nuls A et B.
L'intersection $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des multiples communs à A et B.
Cet ensemble contient des polynômes non nuls, et par exemple le produit AB.
L'ensemble des degrés de ces multiples communs non nuls possède donc un plus petit élément, ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 12.4.2 (ppcm de deux polynômes non nuls)
Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.
Soit m le degré minimum d'un polynôme parmi tous les multiples communs non nuls de A et B.
Tout multiple commun de A et B, de degré m, est appelé un ppcm de A et B.

Tout comme le pgcd, le ppcm de deux polynômes n'est pas défini de façon unique.
Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 12.4.8 (le ppcm est défini « à association près »)
Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.
Soit M un ppcm de A et B. Soit N un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
Alors N est un ppcm de A et B si et seulement si M et N sont associés.
En particulier, A et B possèdent un ppcm unitaire et un seul. Celui est noté $A \vee B$.

Premières propriétés

Il est clair qu'on a les égalités $A \vee B = B \vee A$, et $A \vee 1 = A^*$ (normalisé de A).

On a l'égalité $A \vee B = A^*$ si et seulement si A est un multiple de B.

Le polynôme $A \vee B$ et ses multiples sont des multiples communs aux polynômes A et B.

La proposition suivante dit que la réciproque est vraie :

Proposition 12.4.9 (caractérisation du ppcm de deux polynômes)
Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.
Le polynôme $A \vee B$ est l'unique polynôme normalisé M tel que $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X]$.
Autrement dit, les multiples communs de A et B sont exactement ceux de $A \vee B$.

Si $A = 0$ ou $B = 0$, on peut poser $A \vee B = 0$, ce qui est compatible avec la caractérisation précédente.

Proposition 12.4.10 (mise en facteur dans un calcul de ppcm)
Soit A, B, C trois polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.
Alors on a l'égalité : $(CA) \vee (CB) = C^*(A \vee B)$.

Proposition 12.4.11 (lien entre le pgcd et le ppcm)
Soit A, B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors on a l'égalité : $(A \wedge B)(A \vee B) = (AB)^*$.

Conséquence : le polynôme $A \vee B$ est le normalisé du quotient de AB par $A \wedge B$.

12.4.5 Couples de polynômes premiers entre eux

Définition 12.4.3 (polynômes premiers entre eux)
Soit A et B deux polynômes. On dit que A et B sont *premiers entre eux* si $A \wedge B = 1$.
Cela revient à dire que les seuls diviseurs communs à A et B sont les polynômes constants non nuls.

Dire que A et B sont premiers entre eux, c'est dire que le dernier reste non nul dans leur algorithme d'Euclide est un polynôme de degré 0 (c'est-à-dire une constante non nulle).

Proposition 12.4.12 (théorème de Bézout)
Soit A et B deux polynômes. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
– *les polynômes A et B sont premiers entre eux.*
– *il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.*

Le théorème de Bézout a des conséquences fondamentales en arithmétique des polynômes :

Proposition 12.4.13 (lemme de Gauss)
Soit A, B, C trois polynômes. Si A divise BC et si A est premier avec B, alors A divise C.

Proposition 12.4.14 (résolution de $AU + BV = 1$ quand A et B sont premiers entre eux)
Soit A et B deux polynômes premiers entre eux.
Alors il existe une infinité de couples (U, V) de $\mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.
Si (U_0, V_0) est l'un d'eux, les autres sont donnés par $\begin{cases} U = U_0 + QB \\ V = V_0 - QA \end{cases}$ *avec Q dans $\mathbb{K}[X]$.*

Proposition 12.4.15 (polynôme premier avec un produit)
Soit A, B, C trois polynômes. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
– *le polynôme A est premier avec le polynôme B et avec le polynôme C.*
– *le polynôme A est premier avec le produit BC.*

Plus généralement, soit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ deux familles de polynômes.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
– chacun des polynômes A_1, A_2, … , A_m est premier avec chacun des polynômes B_1, B_2, …, B_n.
– le produit $A_1A_2 \cdots A_m$ est premier avec le produit $B_1B_2 \cdots B_n$.

Par exemple, si $A \wedge B = 1$, alors $A^m \wedge B^n = 1$ pour tous entiers naturels m et n.

Proposition 12.4.16 (divisibilité par deux polynômes premiers entre eux)
Soit A, B, C trois polynômes, A et B étant supposés premiers entre eux.
Le polynôme C est divisible par A et par B si et seulement si il est divisible par leur produit.

Plus généralement si les polynômes A_1, A_2, …, A_n sont premiers entre eux deux à deux, le polynôme C est divisible par chacun des A_k si et seulement si il est divisible par leur produit.

Quotient de deux polynômes par leur pcgd
Soit A et B deux polynômes (non tous deux nuls).
Soit $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ les polynômes tels que $A = (A \wedge B)\widehat{A}$ et $B = (A \wedge B)\widehat{B}$. Alors $\widehat{A} \wedge \widehat{B} = 1$.

Cas particulier des polynômes $(X-\lambda)^m$

Si λ et μ sont deux scalaires distincts, alors $(X-\lambda)\wedge(X-\mu)=1$.

Plus généralement, soit $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_p$ des scalaires distincts deux à deux.

Soit $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p$ des entiers naturels.

Alors les polynômes $\begin{cases} A=(X-\lambda_1)^{\alpha_1}(X-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots(X-\lambda_n)^{\alpha_n} \\ B=(X-\mu_1)^{\beta_1}(X-\mu_2)^{\beta_2}\cdots(X-\mu_p)^{\beta_p} \end{cases}$ sont premiers entre eux.

12.4.6 Pgcd et ppcm de plusieurs polynômes

Proposition 12.4.17 (associativité du pgcd et du ppcm)

Pour tous polynômes A,B,C, on a les égalités $\begin{cases} A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C \\ A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C \end{cases}$

L'associativité (et la commutativité) du pgcd et du ppcm ont pour conséquence que si on se donne n polynômes A_1, A_2, …, A_n, alors les expressions $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$ et $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$ ont un sens, indépendamment de l'ordre des facteurs A_k et de celui dans lequel on effectue les calculs.

On peut alors poser la définition suivante :

Définition 12.4.4

Soit A_1, A_2, …, A_n une famille de n polynômes, avec $n\geqslant 2$.

Le polynôme $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$ est appelé le pgcd des polynômes A_1, A_2, …, A_n.

Le polynôme $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$ est appelé le ppcm des polynômes A_1, A_2, …, A_n.

Caractérisation du pgcd et du ppcm

$D=A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$ est l'unique polynôme unitaire tel que $\mathcal{D}(A_1)\cap\mathcal{D}(A_2)\cap\cdots\cap\mathcal{D}(A_n)=\mathcal{D}(D)$.
Autrement dit, les diviseurs communs aux polynômes A_1, A_2, …, A_n sont les diviseurs de leur pcgd.

$M=A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$ est l'unique polynôme unitaire tel que $A_1\mathbb{Z}\cap A_2\mathbb{Z}\cap\cdots\cap A_n\mathbb{Z}=M\mathbb{Z}$.
Autrement dit, les multiples communs aux polynômes A_1, A_2, …, A_n sont les multiples de leur ppcm.

Proposition 12.4.18 (factorisation dans un calcul de pgcd/ppcm)

Soit $A_1,\ldots,A_n$ des polynômes. Soit Q un polynôme non nul.

On les égalités : $\begin{cases} (QA_1)\wedge(QA_2)\wedge\cdots\wedge(QA_n)=Q^*(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n) \\ (QA_1)\vee(QA_2)\vee\cdots\vee(QA_n)=Q^*(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n) \end{cases}$

Proposition 12.4.19 (relation de Bézout)

Soit $A_1,A_2,\ldots,A_n$ une famille de n polynômes, avec $n\geqslant 2$. Soit D leur pcgd.

Alors il existe des polynômes $U_1,U_2,\ldots,U_n$ tels que : $A_1U_1+A_2U_2+\cdots+A_nU_n=D$.

12.4.7 Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble

Définition 12.4.5 (polynômes premiers entre eux dans leur ensemble)
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille de n polynômes, avec $n \geqslant 2$.
On dit que ces n polynômes sont *premiers entre eux dans leur ensemble* si leur pgcd est égal à 1.
Cela équivaut à dire que leurs seuls diviseurs communs sont les polynômes constants non nuls.

Proposition 12.4.20 (caractérisation par une identité de Bézout)
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille de n polynômes, avec $n \geqslant 2$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
– *les polynômes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble*
– *il existe n polynômes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ tels que : $A_1U_1 + A_2U_2 + \cdots + A_nU_n = 1$*

Premiers entre eux : « deux à deux » ou « dans leur ensemble » ?

On ne confondra pas « premiers entre eux deux à deux » et « premiers entre eux dans leur ensemble ».

Si deux au moins des polynômes $A_1, \ldots, A_n$ sont premiers entre eux, et a fortiori si les polynômes $A_1, \ldots, A_n$ sont premiers entre eux *deux à deux*, alors ils le sont *dans leur ensemble*.

Mais la réciproque est fausse, comme on le voit avec $A = X^2 - X$, $B = X^2 + X$ et $C = X^2 - 1$.
Les polynômes A, B, C sont en effet premiers entre eux dans leur ensemble (on a $(A + B)/2 - C = 1$).
Pourtant $A \wedge B = X(X - 1) \wedge X(X + 1) = X$.
De même : $A \wedge C = X(X-1) \wedge (X+1)(X-1) = X-1$, et $B \wedge C = X(X+1) \wedge (X+1)(X-1) = X+1$.

Remarques

Attention : l'égalité $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$ ne se généralise pas à plus de deux polynômes.
On reprend l'exemple de $A = X^2 - X$, $B = X^2 + X$ et $C = X^2 - 1$.
Avec ces trois polynômes, on a $A \wedge B \wedge C = 1$ et $A \vee B \vee C = X^3 - X$, mais ABC est de degré 6.

En revanche, si $A_1, \ldots, A_n$ sont premiers entre eux <u>deux à deux</u>, alors $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n = A_1A_2 \cdots A_n$.

12.5 Polynômes irréductibles et factorisations

12.5.1 Polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$

On rappelle qu'un polynôme P quelconque de $\mathbb{K}[X]$ est divisible par tous les polynômes constants non nuls, et que si P est non nul il est divisible par tous ses associés, c'est-à-dire les λP avec λ dans $\mathbb{K}^*$.

Définition 12.5.1 (polynômes irréductibles)
Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{K}$[X].
On dit que P est irréductible dans $\mathbb{K}$[X] si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}$[X] sont :
– les polynômes constants non nuls.
– les polynômes associés à P, c'est-à-dire les λP, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.

A contrario, un polynôme non constant P n'est pas irréductible (donc est « réductible ») dans $\mathbb{K}[X]$ s'il possède une « factorisation stricte », c'est-à-dire s'il existe A et B dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$ avec $\deg(A) < \deg(P)$ et $\deg(B) < \deg(P)$.

La description des polynômes irréductibles est facile dans $\mathbb{C}[X]$, assez facile dans $\mathbb{R}[X]$, mais difficile dans $\mathbb{Q}[X]$ (polynômes à coefficients rationnels). On se contente ici d'un aperçu très sommaire du cas général $\mathbb{K}[X]$, sachant que le programme de la classe de MPSI se limite à $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

On a vu à quel point l'arithmétique des polynômes est proche de celle des entiers. Cette proximité s'explique par l'existence d'une division euclidienne, à la fois dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{K}[X]$ (et c'est cette division qui conduit, via l'algorithme d'Euclide, à la notion de Pgcd). La notion de polynôme irréductible est dans la continuité de cette proximité, les polynômes irréductibles jouant le rôle qu'ont joué les nombres premiers dans l'arithmétique des entiers.

Remarques et propriétés

– Tout polynôme de degré 1 est irréductible.
  Si $\deg(P) \geqslant 2$ et si P admet une racine dans $\mathbb{K}$, alors P n'est *pas* irréductible dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
  Si $\deg(P) \in \{2, 3\}$ et si P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$ alors il *est* irréductible dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
  Cette propriété cesse d'être vraie si $\deg(P) \geqslant 4$ (exemple : $P = (\mathrm{X}^2 + 1)^2$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$).
– La notion de polynôme irréductible dépend du corps $\mathbb{K}$.
  Ainsi $A = X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, mais pas dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ car $A = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.
  De même $A = X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, mais pas dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ car $A = (X - i)(X + i)$.
– Si un polynôme irréductible P ne divise pas un polynôme A, alors il est premier avec A.
  En particulier, P est premier avec les polynômes de degré strictement inférieur à $\deg(P)$.
– Soit P un polynôme irréductible, et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille de polynômes.
  Alors P divise le produit $A_1 A_2 \ldots A_n$ si et seulement si P divise l'un au moins des A_k.
– Si un polynôme P est irréductible, ses associés le sont aussi.
  Si deux polynômes irréductibles ne sont pas associés, ils sont premiers entre eux.
  Deux polynômes irréductibles unitaires distincts sont premiers entre eux.

Proposition 12.5.1 (existence d'un diviseur irréductible)
Tout polynôme non constant est divisible par au moins un polynôme irréductible.

Proposition 12.5.2 (décomposition en produit de polynômes irréductibles)
Tout polynôme A non constant s'écrit $A = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_m^{\alpha_m}$, où :
– *m est un entier strictement positif.*
– *$P_1, P_2, \ldots, P_m$ sont des polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux.*
– *$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont des entiers strictement positifs.*
Une telle écriture de A est unique à l'ordre près des facteurs.
On l'appelle décomposition de A en produit de facteurs irréductibles.

Dans cette écriture de A, les P_k sont les diviseurs irréductibles unitaires du polynôme A.

12.5.2 Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

On rappelle le résultat fondamental suivant (dont la démonstration est admise !)

Proposition 12.5.3 (théorème de d'Alembert-Gauss)
Tout polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, de degré $n \geqslant 1$, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
On exprime cette propriété en disant que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos*.*

Le théorème de d'Alembert-Gauss à une conséquence immédiate :

Proposition 12.5.4
Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ sont les polynômes de degré 1.

Ce qui conduit à la forme générale de la factorisation en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$:

Proposition 12.5.5 (factorisation dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$)
Soit A un polynôme non constant de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
Alors A s'écrit de manière unique (à l'ordre près des facteurs) $A = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k}$ où :
- *le scalaire non nul λ est le coefficient dominant de A.*
- *les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les racines distinctes de A dans $\mathbb{C}$.*
- *les entiers strictement positifs $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont leurs multiplicités respectives.*

Un exemple important

Les racines de $\mathrm{X}^n - 1$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines n-ièmes de l'unité $\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_{n-1}$.

Ce sont toutes des racines de multiplicité 1.

La factorisation dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est donc $\mathrm{X}^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - \omega_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \Big(\mathrm{X} - \exp \frac{2ik\pi}{n}\Big)$

Avec les relations coefficients-racines, on trouve immédiatement $\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1} = 0 \\ \omega_0\, \omega_1 \cdots \omega_{n-1} = (-1)^{n-1} \end{cases}$

Par exemple, si $n = 3$: $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$.

Autre exemple, si $n = 6$: $X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2)$.

Dans le cas particulier où A est un polynôme *à coefficients réels*, et si on veut le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, la décomposition fait apparaître les (éventuelles) racines réelles d'une part, et les (éventuelles) racines non réelles d'autre part. On sait que si α est une racine non réelle de A, avec la multiplicité $m \geqslant 1$, alors $\overline{\alpha}$ est également une racine de A, avec la même multiplicité :

Proposition 12.5.6 (factorisation dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ d'un polynôme à coefficients réels)
Soit A un polynôme non constant de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Alors la décomposition de A dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près des facteurs) : $A = \lambda \prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X}-\alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{q}(\mathrm{X}-\beta_j)^{m'_j} \prod_{j=1}^{q}(\mathrm{X}-\overline{\beta_j})^{m'_j}$ *où :*

- *le réel non nul λ est le coefficient dominant de A.*
- *les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les racines réelles éventuelles distinctes de A.*
  les entiers strictement positifs $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont leurs multiplicités respectives.
- *les complexes $\beta_1, \overline{\beta_1}, \beta_2, \overline{\beta_2}, \ldots, \beta_q, \overline{\beta_q}$, sont les racines complexes non réelles éventuelles distinctes (et conjuguées deux à deux) de A, et $m'_1, m'_2, \ldots, m'_p$ sont leurs multiplicités respectives.*

On peut proposer une autre forme de la décomposition en facteurs irréductibles de A dans $\mathbb{C}[X]$, en y faisant figurer tous les polynômes irréductibles unitaires $X-\alpha$, mais avec des exposants positifs ou nuls (exposants strictements positifs uniquement pour les racines effectives du polynôme A) :

Proposition 12.5.7 (autre forme de la factorisation dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$)
Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
Alors A s'écrit de manière unique (à l'ordre près des facteurs) $A = \lambda \prod_{\alpha\in\mathbb{C}}(\mathrm{X}-\alpha)^{m_\alpha}$ *où :*

- *le scalaire λ est le coefficient dominant de A.*
- *l'entier $m_\alpha \geqslant 0$ est la multiplicité de α comme racine de A.*

La forme précédente permet de caractériser la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 12.5.8
Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$.
Soit $A = \lambda \prod_{\alpha\in\mathbb{C}}(\mathrm{X}-\alpha)^{m_\alpha}$ et $B = \mu \prod_{\alpha\in\mathbb{C}}(\mathrm{X}-\alpha)^{n_\alpha}$ leurs factorisations dans $\mathbb{C}[X]$.
Alors A divise B si et seulement si, pour tout α de $\mathbb{C}$, on a $m_\alpha \leqslant n_\alpha$.

On en déduit une forme du pgcd et du ppcm, à partir des factorisations :

Proposition 12.5.9 (expression factorisée du pgcd et du ppcm)
Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$.
Soit $A = \lambda \prod_{\alpha\in\mathbb{C}}(\mathrm{X}-\alpha)^{m_\alpha}$ et $B = \mu \prod_{\alpha\in\mathbb{C}}(\mathrm{X}-\alpha)^{n_\alpha}$ leurs factorisations dans $\mathbb{C}[X]$.
Alors $A\wedge B = \prod_{\alpha\in\mathbb{C}}(\mathrm{X}-\alpha)^{p_\alpha}$ *et* $A\vee B = \prod_{\alpha\in\mathbb{C}}(\mathrm{X}-\alpha)^{q_\alpha}$ *avec pour tout α de $\mathbb{C}$:* $\begin{cases} p_\alpha = \min(m_\alpha, n_\alpha) \\ q_\alpha = \max(m_\alpha, n_\alpha) \end{cases}$

12.5.3 Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 12.5.10
Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sont :

- *les polynômes de degré 1.*
- *les polynômes $P = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ de degré 2 et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.*

Proposition 12.5.11 (factorisation dans $\mathbb{R}[X]$)
Soit A un polynôme non constant de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Alors A s'écrit de façon unique (à l'ordre près) : $A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{q} (\mathrm{X}^2 + b_k\mathrm{X} + c_k)^{s_k}$ *où :*
- *Le réel non nul λ est le coefficient dominant de A.*
- *Les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les racines distinctes de A dans $\mathbb{R}$.*
  Les entiers strictement positifs $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sont leurs multiplicités respectives.
- *Les polynômes $\mathrm{X}^2 + b_k\mathrm{X} + c_k$, distincts deux à deux, sont à discriminant négatif.*
  Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, chaque $\mathrm{X}^2 + b_k\mathrm{X} + c_k$ se factoriserait en $(\mathrm{X} - \beta_k)(\mathrm{X} - \overline{\beta_k})$,
  où β_k est l'une des racines complexes non réelles de A.
  Les entiers strictement positifs $s_1, \ldots, s_q$ sont les multiplicités respectives de $\beta_1, \ldots, \beta_q$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Dans l'écriture précédente de A, il est possible que q soit nul (si A est scindé dans $\mathbb{R}$), ou que p soit nul (si A ne possède que des racines complexes non réelles).

Dans ce cas, le produit "vide" $\prod_{k=1}^{p} \cdots$ ou $\prod_{k=1}^{q} \cdots$ prend la valeur 1.

Pour factoriser dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme A ayant des racines non réelles, on peut le factoriser dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ puis regrouper les facteurs correspondant à des racines complexes non réelles.

Polynômes bicarrés

Il arrive souvent qu'on ait à factoriser dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ des polynômes "bicarrés" à discriminant négatif, c'est-à-dire du type $A = \mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^2 + c$, avec $\Delta = b^2 - 4c < 0$.

Dans ce cas, on considère les termes X^4 et c comme provenant du développement d'un carré.

Plus précisément, on écrit : $\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^2 + c = (\mathrm{X}^2 + \sqrt{c})^2 - (2\sqrt{c} - b)X^2$.

Or le coefficient $2\sqrt{c} - b$ est strictement positif. On peut donc l'écrire comme un carré β^2.

On arrive alors à $\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^2 + c = (\mathrm{X}^2 + \sqrt{c})^2 - \beta^2 X^2 = (\mathrm{X}^2 + \beta\mathrm{X} + \sqrt{c})(\mathrm{X}^2 - \beta\mathrm{X} + \sqrt{c})$.

À titre d'exemple, voici la factorisation dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du polynôme « quadricarré » $A = \mathrm{X}^8 + \mathrm{X}^4 + 1$.

On a tout d'abord $A = (\mathrm{X}^4 + 1)^2 - \mathrm{X}^4 = (\mathrm{X}^4 - \mathrm{X}^2 + 1)(\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 + 1)$.

Ensuite $\begin{cases} \mathrm{X}^4 - \mathrm{X}^2 + 1 = (\mathrm{X}^2 + 1)^2 - 3\mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^2 + \sqrt{3}\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 - \sqrt{3}\mathrm{X} + 1) \\ \mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 + 1 = (\mathrm{X}^2 + 1)^2 - \mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1) \end{cases}$

Conclusion : $\mathrm{X}^8 + \mathrm{X}^4 + 1 = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 + \sqrt{3}\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 - \sqrt{3}\mathrm{X} + 1)$

12.6 Interpolation de Lagrange

Dans cette section, comme dans le reste du chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère n scalaires distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ dans $\mathbb{K}$.

On se donne également $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{K}$, mais pas nécessairement distincts deux à deux.

Le problème est : existe-t-il des polynômes P (et lesquels ?) tels que : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ P(x_k) = y_k$.

En d'autres termes, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, peut-on faire « passer » la courbe représentative d'un polynôme P par n points $A_k(x_k, y_k)$ donnés (dont les abscisses x_k sont deux à deux distinctes). Et quel est le degré minimum d'un tel polynôme ?

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dont seules sont connues les valeurs $y_k = f(x_k)$ en n abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I, la question devient alors : trouver un polynôme P tel que $P(x_k) = f(x_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Une fois ce polynôme connu, et de degré minimum si possible, on peut « interpoler » la fonction f entre deux abscisses successives x_k et x_{k+1} en posant $f(x) = P(x)$ sur $[x_k, x_{k+1}]$. La question est alors de mesurer la qualité de cette approximation, et de savoir si le choix des abscisses x_k est important.

Il y a plusieurs approches possibles pour former le « polynôme d'interpolation » P, et notamment la méthode de Lagrange. L'idée consiste à former d'abord, pour une famille d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ donnée, des polynômes prenant des valeurs simples sur les x_k.

Définition 12.6.1 (polynômes interpolateurs de Lagrange)

On se donne une famille de n scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, distincts deux à deux.

Pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$ on définit le polynôme $L_k(X) = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$.

Proposition 12.6.1

Avec les notations précédentes, et pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$: $\deg(L_k) = n-1$ *et* $\begin{cases} L_k(x_k) = 1 \\ \forall\, j \neq k,\ L_k(x_j) = 0 \end{cases}$

Par exemple, si $n = 4$:

$$L_1(X) = \frac{(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \qquad L_2(X) = \frac{(X - x_1)(X - x_3)(X - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$L_3(X) = \frac{(X - x_1)(X - x_2)(X - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \qquad L_4(X) = \frac{(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

On voit que L_1, L_2, L_3, L_4 sont des polynômes de degré 3, et qu'ils vérifient :

$$L_1(x_2) = L_1(x_3) = L_1(x_4) = 0 \text{ et } L_1(x_1) = 1 \qquad L_2(x_1) = L_2(x_3) = L_2(x_4) = 0 \text{ et } L_2(x_2) = 1$$

$$L_3(x_1) = L_3(x_2) = L_3(x_4) = 0 \text{ et } L_3(x_3) = 1 \qquad L_4(x_1) = L_4(x_2) = L_4(x_3) = 0 \text{ et } L_4(x_4) = 1$$

Par un principe de « superposition », et dans le cas de n ordonnées $y_1, \ldots, y_n$ quelconques, on peut former un polynôme P de degré $n - 1$ tel que $P(x_k) = y_k$ pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$:

Proposition 12.6.2 (existence et unicité du polynôme d'interpolation de degré minimum)

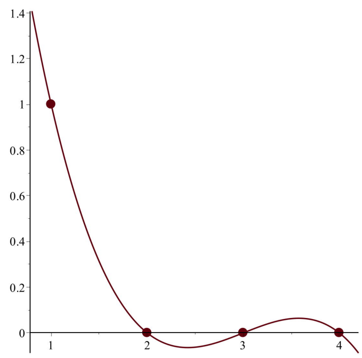
On se donne une famille de n éléments (x_k, y_k) de $\mathbb{K}^2$, les x_k étant distincts deux à deux.

Il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, avec $\deg(P) \leqslant n - 1$, tel que : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ P(x_k) = y_k$.

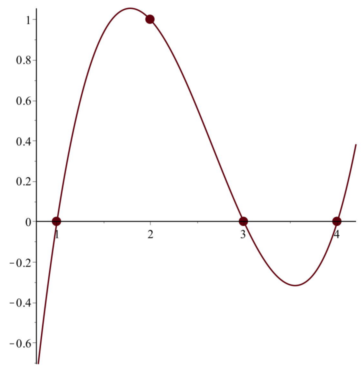
Ce polynôme s'écrit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k L_k(X)$, où on rappelle que : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ L_k(X) = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$.

Pour prendre un exemple, on suppose $n = 4$ et on pose $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

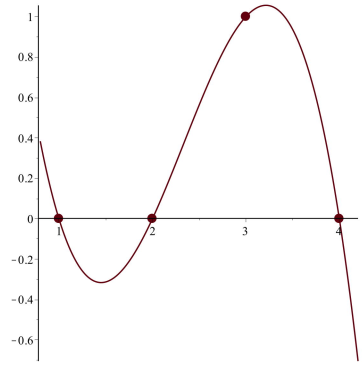
On représente ici les quatre polynômes L_1, L_2, L_3, L_4 qui correspondent à ces abscisses : chaque L_k est de degré 3, il vaut 1 en x_k et s'annule sur les trois autres abscisses.



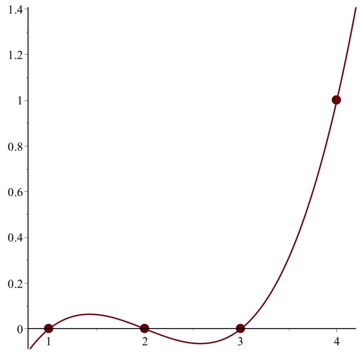
Le polynôme L_1



Le polynôme L_2



Le polynôme L_3



Le polynôme L_4

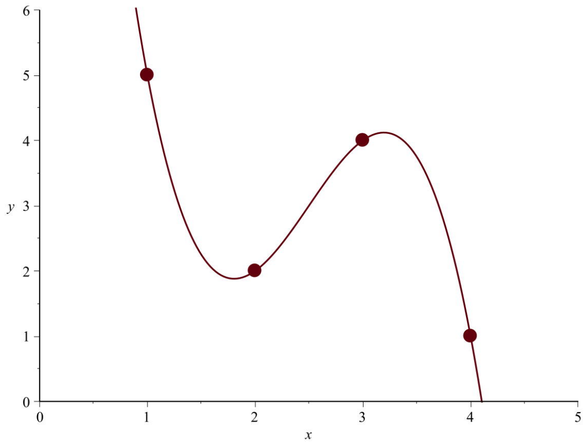
Pour former un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et qui prend les valeurs y_1, y_2, y_3, y_4 sur les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4, il suffit de poser :

$$P(X) = y_1 L_1(X) + y_2 L_2(X) + y_3 L_3(X) + y_4 L_4(X)$$

En reprenant l'exemple précédent, on trace ici la courbe représentative du polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 et qui vérifie les quatre conditions :

$$P(1) = 5,\ P(2) = 2,\ P(3) = 4,\ P(4) = 1.$$

On trouverait : $P(X) = -\dfrac{5}{3}X^3 + \dfrac{25}{2}X^2 - \dfrac{173}{6}X + 23$



Proposition 12.6.3 (expression de tous les polynômes vérifiant les égalités $P(x_k) = y_k$)

On reprend ici les notations de la proposition 12.6.2.

Les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ qui vérifient $\forall\, k \in \{1, \dots, n\},\ P(x_k) = y_k$ sont donnés par :

$$P(X) = P_I(X) + Q(X) \prod_{k=1}^{n} (X - x_k), \text{ où : } \begin{cases} P_I \text{ est le « polynôme interpolateur » de la proposition 12.6.2} \\ Q(X) \text{ est un polynôme quelconque de } \mathbb{K}[X] \end{cases}$$

12.7 Fractions rationnelles

Comme d'habitude, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12.7.1 La construction du corps $\mathbb{K}(X)$

Note : dans le programme de la classe de MPSI, cette construction n'est pas exigible.

Définition 12.7.1 (une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$)
On définit une relation sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ de la façon suivante :
Pour tous couples de polynômes (A, B) et (C, D), avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$: $(A, B)\,\mathcal{R}\,(C, D) \;\Leftrightarrow\; AD = BC$.

Proposition 12.7.1 (définition des fractions rationnelles)
Avec les définitions précédentes, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.
Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées fractions rationnelles *à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.
La classe d'équivalence R du couple (A, B), avec $B \neq 0$, est notée $F = \dfrac{A}{B}$.
Ainsi pour A, B, C, D dans $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$, on a l'équivalence : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \;\Leftrightarrow\; AD = BC$.

Remarques

On ne confondra pas les notations $\mathbb{K}[X]$ (polynômes) et $\mathbb{K}(X)$ (fractions rationnelles).
Quand on dit « soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle », on sous-entend « A, B sont dans $\mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0$ ».
Dans l'écriture $F = \dfrac{A}{B}$, on dit bien sûr que A est le *numérateur* et que B est le *dénominateur*.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle

Pour tous polynômes A, B, Q, avec $B \neq 0$ et $Q \neq 0$, on a $\dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{A}{B}$.
Soit $F = \dfrac{A}{B}$ un élément de $\mathbb{K}(X)$. Soit $\Delta = A \wedge B$.
Il existe deux polynômes C et D tels que $\begin{cases} A = \Delta C \\ B = \Delta D \end{cases}$ donc tels que $F = \dfrac{C}{D}$, avec $C \wedge D = 1$.
Sous cette dernière forme, on dit que F est écrite sous forme *irréductible*, ou *simplifiée*.
Réciproquement, si $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$, avec $C \wedge D = 1$, alors il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $\begin{cases} A = QC \\ B = QD \end{cases}$
Si on supppose deplus $A \wedge B = 1$, alors il existe λ dans $\mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda C$ et $B = \lambda D$.
On en déduit que la forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle est unique si on impose au dénominateur d'être un polynôme unitaire.
Par exemple, la forme irréductible de $F = \dfrac{X^6 - 1}{X^4 - 1} = \dfrac{(X^2 - 1)(X^4 + X^2 + 1)}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)}$ est $F = \dfrac{X^4 + X^2 + 1}{X^2 + 1}$

Les polynômes sont des fractions rationnelles particulières

Dans toute la suite, on identifie la fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{1}$ avec le polynôme A.

Cette identification permet de considérer les polynômes comme des fractions rationnelles particulières.

Le polynôme nul notamment s'identifie à $F = \dfrac{0}{1}$ (avec d'ailleurs $F = \dfrac{0}{B}$ pour tout $B \neq 0$).

Dire qu'une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$ est non nulle, c'est dire que son numérateur A est non nul.

Opérations sur les fractions rationnelles

Proposition 12.7.2 (corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$)
Soit $F = \dfrac{A}{B}$ *et* $G = \dfrac{C}{D}$ *dans* $\mathbb{K}(X)$*. On pose* $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD+BC}{BD}$, *et* $\dfrac{A}{B}\dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$.

Ces définitions ne dépendent pas des couples (A, B) *et* (C, D) *utilisés pour représenter* F *et* G*.*
Munis de ces deux opérations, l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ *possède une structure de corps.*

Le neutre dans $\mathbb{K}(X)$ pour la loi $+$ est la fraction rationnelle (le polynôme) $F = 0$.

L'opposé de la fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$ est la fraction rationnelle $-F = \dfrac{-A}{B}$.

Le neutre dans $\mathbb{K}(X)$ pour la loi $\times$ est la fraction rationnelle (le polynôme) $F = 1$.

Si $F = \dfrac{A}{B} \neq 0$ (c'est-à-dire $A \neq 0$) l'inverse de $F = \dfrac{A}{B}$ pour la loi $\times$ est la fraction rationnelle $\dfrac{1}{F} = \dfrac{B}{A}$.

Définition 12.7.2 (fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle)
Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle, supposée irréductible (c'est-à-dire telle que $A \wedge B = 1$).

Soit $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ les fonctions polynomiales associées aux polynômes A et B.

On appelle fonction rationnelle $\widetilde{F}$, associée à fraction rationnelle F, la fonction $x \mapsto \widetilde{F}(x) = \dfrac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)}$.

Son domaine de définition est $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble des racines de B.

L'application qui à une *fraction* rationnelle F associe la *fonction* $\widetilde{F}$ est injective. Si les fonctions $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ sont égales en un nombre infini de points, alors les fractions rationnelles F et G sont égales. On peut donc sans danger identifier une fraction rationnelle et sa fonction rationnelle associée.

Remarque : soit F dans $\mathbb{R}[X]$, et soit α dans $\mathbb{C}$. Alors $\widetilde{F}(\overline{\alpha})$ est le conjugué de $\widetilde{F}(\alpha)$.

Parité ou imparité d'une fraction rationnelle

Si une fraction rationnelle est paire (invariante par $X \to -X$), on peut l'écrire $F(X) = \dfrac{A(X^2)}{B(X^2)}$.

Si elle est impaire, on peut l'écrire $F(X) = X\dfrac{A(X^2)}{B(X^2)}$.

Par exemple $G = \dfrac{X^4-1}{X^6+3X^2+1}$ est paire : $G = \dfrac{A(X^2)}{B(X^2)}$ avec $A = X^2 - 1$ et $B = X^3 + 3X + 1$.

De même, $G = \dfrac{X^4+1}{X(X^2+1)}$ est impaire : $G = \dfrac{XA(X^2)}{B(X^2)}$ avec $A = X^2 + 1$ et $B = X(X + 1)$.

12.7.2 Degré, partie entière

Définition 12.7.3 (degré d'une fraction rationnelle)
Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle. On dit que $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$ est le *degré* de F.
Cette définition ne dépend pas du couple (A, B) utilisé pour représenter F.

Remarques

Le degré d'une fraction rationnelle non nulle est un entier relatif, et on a encore $\deg(0) = -\infty$.

Si la fraction F est un polynôme, son degré est le même, qu'on se place dans $\mathbb{K}(X)$ ou dans $\mathbb{K}[X]$.

Comme avec les polynômes, on a les relations : $\begin{cases} \deg(F+G) \leqslant \max(\deg(F), \deg(G)) \\ \deg(FG) = \deg(F) + \deg(G) \end{cases}$

Proposition 12.7.3 (partie entière d'une fraction rationnelle)
Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors F s'écrit de manière unique $F = E_F + G$, avec E_F dans $\mathbb{K}[X]$, G dans $\mathbb{K}(X)$, et $\deg(G) < 0$.
On dit que le polynôme E_F est la partie entière *de la fraction rationnelle F.*
En fait, le polynôme E_F n'est autre que le quotient dans la division euclidienne de A par B.

En effet, si cette division est $A = BQ + R$, on trouve : $F = \dfrac{BQ+R}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

Remarques et propriétés

On a $E_F = 0$ si et seulement si $\deg(A) < \deg(B)$. Sinon $\deg(E_F) = \deg(A) - \deg(B)$.

Si $\deg(A) = \deg(B)$, alors E_F est le quotient des coefficients dominants de A et B.

Soit F, G dans $\mathbb{K}(X)$ et λ, μ dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathrm{E}_{\lambda F + \mu G} = \lambda E_F + \mu E_G$.

Si F est paire (resp. impaire), alors E_F est un polynôme pair (resp. impair).

12.7.3 Zéros et pôles, multiplicités

Définition 12.7.4 (pôles d'une fraction rationnelle)
Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible.
Les deux polynômes A et B, premiers entre eux, n'ont donc pas de racine commune dans $\mathbb{K}$.
Soit α un élément de $\mathbb{K}$, et m un élément de $\mathbb{N}^*$.
On dit que α est un zéro de F, avec la multiplicité m, si α est un zéro de A, avec la multiplicité m.
On dit que α est un pôle de F, avec la multiplicité m, si α est un zéro de B, avec la multiplicité m.

Remarques :

– Dire que α est un zéro de F avec la multiplicité m, c'est dire que $F = \dfrac{(X-\alpha)^m Q}{B}$, avec $\begin{cases} Q(\alpha) \neq 0 \\ B(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

De même, α est un pôle de F de multiplicité $m \;\Leftrightarrow\; F = \dfrac{A}{(X-\alpha)^m Q}$, avec $\begin{cases} A(\alpha) \neq 0 \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

– On parle de pôle simple si $m = 1$, et de pôle multiple si $m > 1$.
  On parle de pôle double si $m = 2$, triple si $m = 3$, etc.

– Dire que α est pôle simple de $F = \dfrac{A}{B}$, c'est dire que $A(\alpha) \neq 0$, $B(\alpha) = 0$, et $B'(\alpha) \neq 0$.
  De même, α est un pôle double de $F = \dfrac{A}{B}$ si et seulement si $\begin{cases} A(\alpha) \neq 0 \\ B(\alpha) = B'(\alpha) = 0,\ B''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

– Soit F une fraction rationnelle à coefficients réels.
  Soit α un pôle complexe non réel de F de multiplicité m.
  Alors $\overline{\alpha}$ est un pôle de F de multiplicité m.

12.8 Décomposition en éléments simples

12.8.1 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Proposition 12.8.1 (forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$)
Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes, écrite sous forme irréductible.
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les pôles distincts de F, avec les multiplicités respectives $r_1, \ldots, r_p$.
Alors F s'écrit de manière unique $F = E_F + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j} \right)$
où E_F est la partie entière de F et où les $\lambda_{k,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.
Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples *de F dans $\mathbb{C}(X)$.*

Par exemple, considérons $F = \dfrac{X^{12}+1}{X^4(X-i)^2(X+1)(X-j)^3}$, dont le degré est : $12 - (4+2+1+3) = 2$.

Les racines du dénominateur sont $0, i, -1, j$ et aucune d'elles n'est racine du numérateur.

La fraction rationnelle est donc écrite sous forme irréductible.

Ses pôles sont 0 (quadruple), i (double), -1 (simple) et j (triple).

Sa décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{array}{rcll}
F(X) & = & aX^2 + bX + c & \text{(partie entière de } F\text{, ici un polynôme de degré 2)} \\
 & + & \dfrac{\alpha_4}{X^4} + \dfrac{\alpha_3}{X^3} + \dfrac{\alpha_2}{X^2} + \dfrac{\alpha_1}{X} & \text{(« partie polaire » relative au pôle quadruple 0)} \\
 & + & \dfrac{\beta_2}{(X-i)^2} + \dfrac{\beta_1}{X-i} & \text{(partie polaire relative au pôle double } i\text{)} \\
 & + & \dfrac{\gamma_1}{X+1} & \text{(partie polaire relative au pôle simple } -1\text{)} \\
 & + & \dfrac{\delta_3}{(X-j)^3} + \dfrac{\delta_2}{(X-j)^2} + \dfrac{\delta_1}{X-j} & \text{(partie polaire relative au pôle triple } j\text{)}
\end{array}$$

Le calcul de tous ces coefficients demande une technicité qui n'est pas dans l'esprit du programme.

On se contentera donc, dans la suite de cette section, de situations assez élémentaires.

Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ quand le dénominateur est scindé

Ce qui précède s'applique aux fractions rationnelles réelles dont le dénominateur est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Dans ce cas, les coefficients qui apparaissent dans la décomposition sont tous des nombres réels.

Par exemple, considérons la fraction rationnelle irréductible $F(X) = \dfrac{X^3+X+1}{X^5(X-1)^2}$.

Le degré de F est -4 : il est strictement négatif donc la partie entière E_F est nulle.

Ses pôles sont 0 (multiplicité 5), et 1 (multiplicité 2).

Sa décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit donc sous la forme :

$$F(X) = \frac{\alpha_5}{X^5} + \frac{\alpha_4}{X^4} + \frac{\alpha_3}{X^3} + \frac{\alpha_2}{X^2} + \frac{\alpha_1}{X} + \frac{\beta_2}{(X-1)^2} + \frac{\beta_1}{X-1} \text{ (où les } \alpha_k \text{ et } \beta_k \text{ sont réels)}$$

12.8.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Proposition 12.8.2 (forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$)

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle à coefficients réels, écrite sous forme irréductible.

On note $B = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{q}(X^2+b_kX+c_k)^{s_k}$ la factorisation de B dans $\mathbb{R}[X]$.

Alors F s'écrit de manière unique : $F = E_F + \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}\right) + \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{s_k}\frac{c_{k,j}X+d_{k,j}}{(X^2+b_kX+c_k)^j}\right)$

où E_F est la partie entière de F et où les $\lambda_{k,j}$, $c_{k,j}$, $d_{k,j}$ sont des réels.

Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples *de F dans $\mathbb{R}(X)$.*

Dans la décomposition de la fraction rationnelle F dans $\mathbb{R}(X)$:

– les fractions $\dfrac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}$ sont appelées *éléments simples de première espèce.*

– les fractions $\dfrac{c_{k,j}X+d_{k,j}}{(X^2+b_kX+c_k)^j}$ sont appelées *éléments simples de seconde espèce.*

Par exemple, soit la fraction rationnelle irréductible $F(X) = \dfrac{64\,X^{13}}{(X+1)^2(X^2+1)^2(X^2+X+1)(X-1)^3}$.

Le degré de F est $13-(2+4+2+3)=2$: il y a donc une partie entière de degré 2.

Ses pôles réels sont -1 (multiplicité 2), et 1 (multiplicité 3).

Les deux facteurs X^2+1 et X^2+X+1 sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

La décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned}
F(X) &= aX^2+bX+c && \text{(partie entière de } F\text{, ici un polynôme de degré 2)}\\
&+ \frac{\alpha_2}{(X+1)^2} + \frac{\alpha_1}{X+1} && \text{(partie polaire relative au pôle double } -1\text{)}\\
&+ \frac{\beta_2X+\gamma_2}{(X^2+1)^2} + \frac{\beta_1X+\gamma_1}{X^2+1} && \text{(partie relative au facteur } (X^2+1)^2\text{)}\\
&+ \frac{\delta_1X+\lambda_1}{X^2+X+1} && \text{(partie relative au facteur } X^2+X+1\text{)}\\
&+ \frac{\mu_3}{(X-1)^3} + \frac{\mu_2}{(X-1)^2} + \frac{\mu_1}{X-1} && \text{(partie polaire relative au pôle réel triple 1)}
\end{aligned}$$

On trouve en fait :

$$F(X) = 576X^2 + \frac{108}{(X-1)^2} + \frac{64(X+2)}{X^2+X+1} + \frac{36(7X+11)}{X^2+1} + \frac{18}{(X+1)^2} + \frac{413}{X-1} + \frac{12}{(X-1)^3} - \frac{72(X+1)}{(X^2+1)^2} - \frac{153}{8(X+1)}$$

Autre exemple, considérons la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{(X^2+1)^4(X^2-X+1)^3}$

Sa décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$F(X) = -\frac{X}{(X^2+1)^4} - \frac{2X+3}{(X^2+1)^3} + \frac{3X-6}{(X^2+1)^2} + \frac{14X+1}{X^2+1} + \frac{X-1}{(X^2-X+1)^3} - \frac{2X+3}{(X^2-X+1)^2} - \frac{14X+13}{X^2-X+1}$$

12.8.3 Cas d'un pôle simple

Soit $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$ un élément de $\mathbb{K}(X)$ admettant α comme pôle simple.

On a donc $A(\alpha) \neq 0$, et on peut écrire $F(X)$ sous la forme $F(X) = \dfrac{A(X)}{(X-\alpha)Q(X)}$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

La décomposition de F s'écrit $F(X) = \dfrac{\lambda}{X-\alpha} + G(X)$, où α n'est pas un pôle de G.

Après produit par $X - \alpha$, on trouve $\dfrac{A(X)}{Q(X)} = \lambda + (X-\alpha)G(X)$, donc $\lambda = \dfrac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}$.

Dans la pratique, on multiplie F par $X - \alpha$, et après simplification on substitue α à X.
Cette méthode est très adaptée au cas (fréquent) où B est factorisé.

On remarque également que $B'(X) = (X-\alpha)Q'(X) + Q(X)$, et il en résulte $B'(\alpha) = Q(\alpha)$.

Le coefficient λ peut donc également s'écrire : $\lambda = \dfrac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$.

Cette dernière méthode est adaptée au cas où B n'est pas factorisé (cf deuxième exemple ci-dessous).

Un premier exemple

On se propose de décomposer $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Les pôles sont $0, -1, -2, \ldots, -n$, tous de multiplicité 1.

La forme de la décomposition est donc : $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{X+k}$.

Le scalaire λ_k s'obtient en multipliant F par $X + k$ et en substituant $-k$ à X.

On trouve : $\lambda_k = \displaystyle\prod_{j\neq k} \frac{1}{-k+j} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j-k} \prod_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-k} = (-1)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \prod_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k}{n!}\binom{n}{k}$.

Conclusion : $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{X+k}$.

Par exemple, si $n = 3$:

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)(X+3)(X+3)} = \frac{1}{24X} - \frac{1}{6(X+1)} + \frac{1}{4(X+2)} - \frac{1}{6(X+3)} + \frac{1}{24(X+4)}.$$

Un deuxième exemple

On se propose de décomposer $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Ici $F = \dfrac{A}{B}$, avec $\begin{cases} A = 1 \\ B = X^n - 1 \end{cases}$ et les pôles (simples) sont les racines n-ièmes ω_k de l'unité.

Pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$, on a $\dfrac{A(\omega_k)}{B'(\omega_k)} = \dfrac{1}{n\,\omega_k^{n-1}} = \dfrac{\omega_k}{n}$.

La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc $\dfrac{1}{X^n - 1} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\omega_k}{X - \omega_k}$.

Par exemple : $\dfrac{1}{X^4 - 1} = \dfrac{1}{4(X-1)} + \dfrac{i}{4(X-i)} - \dfrac{1}{4(X+1)} - \dfrac{i}{4(X+i)}$.

12.8.4 Décomposition en éléments simples de P'/P

Soit P un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

On se propose de décomposer $F = \dfrac{P'}{P}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Soit α une racine de P, avec la multiplicité $m \geqslant 1$.

On peut donc écrire $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.

On en déduit $P'(X) = (X - \alpha)^{m-1}(mQ(X) + (X - \alpha)Q'(X))$, donc $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{m}{X - \alpha} + \dfrac{Q'}{Q}$.

Ainsi $\dfrac{m}{X - \alpha}$ représente la partie polaire de F pour le pôle α.

On peut conclure de la façon suivante :

Proposition 12.8.3 (décomposition en éléments simples de P'/P)
Soit P un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les racines distinctes de P dans $\mathbb{K}$, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$.
Alors la décomposition de $\dfrac{P'}{P}$ dans $\mathbb{K}(X)$ est : $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \dfrac{m_k}{X - \alpha_k}$.

Par exemple, is $P = X^4(X-1)^2(X+1)^3(X-3)$, alors $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{4}{X} + \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{3}{X+1} + \dfrac{1}{X-3}$.

Remarques

Soit $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$ un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

– Les pôles de $\dfrac{P'}{P}$ sont les racines de P, et ce sont tous des pôles simples.

– Le pgcd de P et de P' est : $P \wedge P' = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k - 1}$.

12.8.5 Pratique de la décomposition en éléments simples

Les méthodes précédentes permettent de décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$, dans les cas usuels (le programme de la classe de MPSI demande expressément de « limiter la technicité des exercices »). On va tout de même décrire ici un certain nombre d'idées permettant de faciliter la recherche de telles décompositions dans des situations plus techniques.

Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction à coefficients réels

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ un élément de $\mathbb{R}(X)$.

On peut considérer F comme un élément de $\mathbb{C}(X)$ et la décomposer en tant que telle.

Cette décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ est nécessairement invariante par conjugaison.

Il en résulte par exemple que la partie entière de F est un polynôme réel.

Il en résulte également que les parties polaires sont conjuguées deux à deux.

Plus précisément, si α et $\overline{\alpha}$ sont deux pôles conjugués non réels de F, de multiplicité m, les parties polaires s'écrivent respectivement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{\lambda_k}}{(X-\overline{\alpha})^k}$.

Cette idée permet donc de diminuer de moitié environ le nombre d'inconnues.

Il est également possible d'utiliser la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction rationnelle réelle F pour obtenir sa décomposition dans $\mathbb{R}$ après regroupement des termes conjugués. Cette méthode n'est envisageable que si les pôles non réels sont de multiplicité 1.

Utilisation de la parité ou de l'imparité

Si une fraction rationnelle est paire ou impaire, sa décomposition doit refléter cette propriété.

Si on exprime cette invariance par les transformations $X \mapsto F(-X)$ ou $X \mapsto -F(-X)$, on en déduit des relations sur les coefficients (le nombre d'inconnues diminue environ de moitié).

Il est possible que la fraction rationnelle F soit invariante (ou changée en son opposée) par une autre transformation « simple », comme : $X \mapsto \lambda - X$. La décomposition de F doit refléter la même invariance. Exprimer cette invariance donne là encore des relations sur les coefficients inconnus.

Injection de valeurs particulières

Quand il reste peu de coefficients à calculer, il peut être intéressant d'injecter, dans l'égalité entre F et sa décomposition, une ou plusieurs valeurs qui ne sont pas des pôles de F.

Si F est dans $\mathbb{R}(X)$, on peut injecter une valeur complexe (comme i ou j), l'identification donnant alors deux relations entre les coefficients réels inconnus.

Utilisation de la méthode $\lim\limits_{x\to\infty} xF(x)$

On suppose ici que le degré de F est strictement négatif (la partie entière est donc nulle).

La décomposition de F fait apparaître des termes du type $\dfrac{\lambda_k}{X-\alpha_k}$ ou $\dfrac{a_kX+b_k}{X^2+\beta_kX+\gamma_k}$.

Le calcul de $\lim\limits_{x\to\infty} xF(x)$ donne alors une relation liant les coefficients λ_k et a_k.

Cette méthode est intéressante quand il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à calculer.

12.8.6 Compléments sur quelques exemples

Décomposition de $F = \dfrac{1}{X^{2n}-1}$ **dans** $\mathbb{R}(X)$

On utilise la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et on regroupe deux à deux les termes conjugués.

Les racines $2n$-ièmes de l'unité sont les $\omega_k = \exp \dfrac{ik\pi}{n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

Pour tout k de $\{1, \ldots, n-1\}$, on a $\omega_{2n-k} = \overline{\omega_k}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^{2n}-1} &= \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{\omega_k}{X-\omega_k} + \frac{\overline{\omega_k}}{X-\overline{\omega_k}}\Big)\\ &= \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{X\cos\frac{k\pi}{n}-1}{X^2-2X\cos\frac{k\pi}{n}+1}\end{aligned}$$

Décomposition de $F = \dfrac{X^5}{(X-1)^4}$ **dans** $\mathbb{R}(X)$

On écrit $X^5 = (X-1+1)^5 = (X-1)^5 + 5(X-1)^4 + 10(X-1)^3 + 10(X-1)^2 + 5(X-1) + 1$.

On en déduit : $F = X + 4 + \dfrac{10}{(X-1)} + \dfrac{10}{(X-1)^2} + \dfrac{5}{(X-1)^3} + \dfrac{1}{(X-1)^4}$.

Décomposition de $F = \dfrac{1}{(X^n-1)^2}$ **dans** $\mathbb{C}(X)$

Les pôles, tous doubles, sont les racines n-ièmes de l'unité.

Le mieux est de procéder par « dérivation » de la décomposition de $G = \dfrac{1}{X^n-1}$.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k} \Rightarrow \frac{nX^{n-1}}{(X^n-1)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{(X-\omega_k)^2}\\ &\Rightarrow \frac{nX^n}{(X^n-1)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k X}{(X-\omega_k)^2} \Rightarrow \frac{n(X^n-1+1)}{(X^n-1)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k(X-\omega_k+\omega_k)}{(X-\omega_k)^2}\\ &\Rightarrow \frac{1}{X^n-1} + \frac{1}{(X^n-1)^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k^2}{(X-\omega_k)^2}\\ &\Rightarrow \frac{1}{(X^n-1)^2} = \frac{1-n}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k^2}{(X-\omega_k)^2}\end{aligned}$$

Décomposition de $F = \dfrac{1}{X^3(X^2-1)}$ **dans** $\mathbb{R}(X)$

Les pôles sont 0 (triple), 1 (simple) et -1 (simple). La partie entière est nulle.

Posons $F = \dfrac{a}{X^3} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X} + \dfrac{d}{X-1} + \dfrac{e}{X+1}$. L'imparité de F donne $b = 0$ et $e = d$.

On trouve a en multipliant par X^3 et en substituant 0 à X. Donc $a = -1$.

On trouve d en multipliant par $(X-1)$ et en substituant 1 à X. Donc $d = \dfrac{1}{2}$.

Si on utilise la méthode $\lim\limits_{x\to\infty} xF(x)$, on trouve $0 = c + 1$.

Finalement : $F = \dfrac{1}{X^3(X^2-1)} = -\dfrac{1}{X^3} - \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{2(X-1)} + \dfrac{1}{2(X+1)}$.

Décomposition de $F = \dfrac{1}{X(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$ **dans** $\mathbb{R}(X)$

La décomposition est de la forme : $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{cX+d}{X^2+1} + \dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1} + \dfrac{\lambda X+\mu}{X^2-X+1}$.

L'imparité de F donne immédiatement : $d = 0$, $\mu = -\beta$ et $\lambda = \alpha$.

On cherche donc a, c, α, β tels que : $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{cX}{X^2+1} + \dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1} + \dfrac{\alpha X-\beta}{X^2-X+1}$.

On trouve a en multipliant par X et en substituant 0 à X. Donc $a = 1$.

On trouve c en multipliant par X^2+1 et en substituant i à X. Donc $c = -1$.

On trouve α, β en multipliant par X^2+X+1 et en substituant j à X :

$$\begin{aligned}(X^2+X+1)F &= \frac{1}{X(X^2+1)(X^2-X+1)} = \alpha X + \beta + (X^2+X+1)(\cdots)\\ &\Rightarrow \alpha j + \beta = \frac{1}{j(j^2+1)(j^2-j+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Finalement : $F = \dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{X^2+1} + \dfrac{1}{2(X^2+X+1)} - \dfrac{1}{2(X^2-X+1)}$.

Décomposition de $F = \dfrac{X^8}{(X^2-X+1)^3}$ **dans** $\mathbb{R}(X)$

On procède à des divisions successives par $B = X^2 - X + 1$.

– on trouve $X^8 = Q_1B + R_1$, avec $Q_1 = X^6 + X^5 - X^3 - X^2 + 1$ et $R_1 = X - 1$.

– on trouve $Q_1 = Q_2B + R_2$, avec $Q_2 = X^4 + 2X^3 + X^2 - 2X - 4$ et $R_2 = -2X + 5$.

– on trouve $Q_2 = Q_3B + R_3$, avec $Q_3 = X^2 + 3X + 3$ et $R_3 = -2X - 7$.

Ainsi : $X^8 = R_1 + R_2B + R_3B^2 + Q_3B^3$ puis $F = \dfrac{X^8}{B^3} = Q_3 + \dfrac{R_3}{B} + \dfrac{R_2}{B^2} + \dfrac{R_1}{B^3}$.

Conclusion : $F = X^2 + 3X + 3 - \dfrac{2X+7}{X^2-X+1} - \dfrac{2X-5}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{X-1}{(X^2-X+1)^3}$