Chapitre 14

Applications linéaires

Sommaire

14.1 Généralités

14.1.1 Notion d'application linéaire

Définition 14.1.1 (applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Une application f de E dans F est dite *linéaire* si : $\forall\,(u,v)\in E^2,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \begin{cases} f(u+v)=f(u)+f(v) \\ f(\lambda u)=\lambda f(u)\end{cases}$
On dit aussi que f est un *morphisme* d'espaces vectoriels.

Premières propriétés

$f: E\to F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall\,(u,v)\in E^2,\ \forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$$

Si f est linéaire, alors $f\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i\,u_i\Big)=\sum_{i\in I}\lambda_i\,f(u_i)$ pour toute combinaison linéaire.

On exprime cette propriété en disant qu'une application linéaire « conserve les combinaisons linéaires ».

Si $f: E\to F$ est linéaire, alors $f(\overrightarrow{0}_E)=\overrightarrow{0}_F$ (utile pour montrer la non-linéarité).

Notations et terminologie

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même.

On note $\mathcal{L}(E)$ (plutôt que $\mathcal{L}(E,E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.

On dit qu'un isomorphisme de E dans lui-même est un *automorphisme* de E.

On dit qu'une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est une *forme linéaire*.

14.1.2 Premiers exemples d'applications linéaires

– Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. L'application nulle de E dans F est linéaire.

– Soit $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
 L'application $f\to\varphi(f)=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur l'espace $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

– L'application $f\mapsto f'$ est un endomorphisme de $E=\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

– Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont les applications $f\colon(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\displaystyle\sum_{k=1}^n\lambda_k\,x_k$.

– Soit $f_1,\ldots,f_p$ des applications linéaires de E dans F.
 Alors l'application $u\mapsto f(u)=(f_1(u),\ldots,f_p(u))$ est linéaire de E dans F^p.
 Par exemple, l'application $(x,y,z)\mapsto(2x-y+z,x-3y+2z)$ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
 Plus généralement, tout application $f\colon(x_1,\ldots,x_n)\mapsto\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kx_k,\sum_{k=1}^n b_kx_k,\sum_{k=1}^n c_kx_k,\text{etc.}\Big)$ est linéaire.

14.1.3 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 14.1.1 (combinaisons linéaires d'applications linéaires)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Soit f et g deux applications linéaires de E dans F, et soit α, β deux scalaires.
Alors l'application $\alpha f + \beta g$ est linéaire de E dans F.
Il en résulte que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 14.1.2 (composition d'applications linéaires)
Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G.

Proposition 14.1.3 (isomorphisme réciproque)
Soit f un isomorphisme de E sur F. Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Bilinéarité de la composition des applications linéaires

Soit f, g, h des applications linéaires, et soit α, β des scalaires.
L'égalité $(\alpha f + \beta g) \circ h = \alpha\, f \circ h + \beta\, g \circ h$ est toujours vraie (et cela n'utilise pas la linéarité).
L'égalité $h \circ (\alpha f + \beta g) = \alpha\, h \circ f + \beta\, h \circ g$ est vraie (et cela utilise la linéarité de h).
On retiendra qu'entre applications linéaires, la composition $(f, g) \mapsto f \circ g$ est « bilinéaire ».

14.1.4 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Proposition 14.1.4 (image d'un sous-espace par une application linéaire)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f une application linéaire de E dans F.
Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

Il y a un cas particulier important :

Définition 14.1.2 (image d'une application linéaire)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f une application linéaire de E dans F.
Le sous-espace $f(E) = \{f(u),\ u \in E\}$ de F est appelé image de f, et il est noté $\mathrm{Im}\ (f)$.

Proposition 14.1.5 (image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f une application linéaire de E dans F.
Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Il y a un cas particulier important :

Définition 14.1.3 (noyau d'une application linéaire)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f une application linéaire de E dans F.
Le sous-espace $f^{-1}(\{\overrightarrow{0}_F\}) = \{u \in E,\ f(u) = \overrightarrow{0}_F\}$ de E est appelé noyau de f, et il est noté $\mathrm{Ker}(f)$.

On peut parfois montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel en l'interprétant comme le noyau ou l'image d'une application linéaire.

Proposition 14.1.6 (caractérisation de l'injectivité par le noyau)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f une application linéaire de E dans F.
f est injective si et seulement si son noyau $\operatorname{Ker}(f)$ se réduit à $\{\overrightarrow{0}_E\}$.
Autrement dit, f est injective si et seulement si : $\forall u \in E, f(u) = \overrightarrow{0}_F \Rightarrow u = \overrightarrow{0}_E$.

Sous-espace $E_\lambda(f)$ des vecteurs u tels que $f(u) = \lambda u$

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E, et soit λ un scalaire.
Notons $E_\lambda(f)$ l'ensemble des vecteurs u de E tels que $f(u) = \lambda u$.
On a les équivalences : $f(u) = \lambda u \;\Leftrightarrow\; (f - \lambda\mathrm{Id})(u) = \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id})$.
Ainsi $E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id})$, et il en résulte que $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Il y a deux cas particuliers importants :
– les vecteurs *invariants* par f : $\operatorname{Inv}(f) = E_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{u \in E,\ f(u) = u\}$
– les vecteurs changés en leur opposé par f : $\operatorname{Opp}(f) = E_{-1} = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \{u \in E,\ f(u) = -u\}$

14.2 Endomorphismes

14.2.1 Structure d'anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$

L'application *identité*, notée Id_E, définie par $\mathrm{Id}_E(u) = u$ pour tout u, est un automorphisme de E.

Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors $g \circ f$ est un endomorphisme de E.

Il en résulte que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est muni d'une structure d'anneau.

On note souvent gf la composée des endomorphismes g et f, plutôt que $g \circ f$.

Si f est un endomorphisme de E, on note $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois), avec par convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Homothéties d'un espace vectoriel

Pour tout scalaire λ, l'application $h_\lambda :\; u \to \lambda u$ est un endomorphisme de E.

On a toujours $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.

L'application h_λ un automorphisme si $\lambda \neq 0$, et alors $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.

Si $\lambda \neq 0$, on dit que h_λ est l'*homothétie* de rapport λ.

Endomorphismes qui commutent

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Si E est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, alors $\mathcal{L}(E)$ est réduit à l'application nulle (sans grand intérêt).

Si E est une droite vectorielle, alors $\mathcal{L}(E)$ se réduit à l'application nulle et aux homothéties de E (et la loi $\circ$ est commutative).

Dans tous les autres cas, donc dès que $\dim(E) \geqslant 2$, l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est non commutatif (autrement dit : il existe des endomorphismes f et g tels que $f \circ g \neq g \circ f$).

Dans tous les cas, il existe des applications linéaires qui commutent (donc qui vérifient $f \circ g = g \circ f$).

Les homothéties $h_\lambda : u \mapsto \lambda u$ de E commutent avec tous les endomorphismes de E.

Si f et g commutent dans $\mathcal{L}(E)$, on peut utiliser la formule du binôme : $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$.

Ainsi, pour tout f de $\mathcal{L}(E)$ et tout λ de $\mathbb{K}$, on a : $(f + \lambda \mathrm{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} f^k$.

14.2.2 Le groupe linéaire $(GL(E), \circ)$

Si f et g sont des automorphismes de E. alors f^{-1} et $g \circ f$ sont encore des automorphismes de E.

On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

C'est un groupe pour la loi de composition, appelé le « groupe linéaire de E ».

Le groupe $GL(E)$ est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Ce groupe est non commutatif dès que $\dim(E) \geqslant 2$.

14.2.3 Projections et symétries vectorielles

Définition 14.2.1 (projections et symétries vectorielles)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
On sait que pour tout u de E, il existe un unique v de F et un unique w de G tels que $u = v + w$.
L'application $p : u \to p(u) = v$ est appelée *projection* sur F, parallèlement à G.
l'application $s : u \to s(u) = v - w$ est appelée *symétrie* par rapport à F, parallèlement à G.

Propriétés

On garde ici les notations de la définition précédente.
L'application p est un endomorphisme de E, et vérifie $p \circ p = p$.
On a $F = \mathrm{Im}\ (p) = \mathrm{Inv}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
L'application s est un automorphisme de E, et vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, donc $s^{-1} = s$ (application *involutive*).
On a la relation $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, qui s'écrit encore $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.
On a $F = \mathrm{Inv}(f)$ (vecteurs invariants) et $G = \mathrm{Opp}(s)$ (vecteurs changés en leur opposé).
Soit p' la projection sur G parallèlement à F, et s' la symétrie par rapport à G parallèlement à F.
Alors on a les relations : $\begin{cases} p + p' = \mathrm{Id}_E, \quad p \circ p' = p' \circ p = 0 \\ s + s' = 0, \quad s \circ s' = s' \circ s = -\mathrm{Id}_E \end{cases}$

Quelques cas très particuliers

On considère la somme directe $E = E \oplus \{\overrightarrow{0}\}$.
La projection sur E parallèlement à $\{\overrightarrow{0}\}$ est l'application Id_E.
C'est le seul cas où une projection vectorielle est injective.
La projection sur $\{\overrightarrow{0}\}$ parallèlement à E est l'application nulle.
La symétrie par rapport à E parallèlement à $\{\overrightarrow{0}\}$ est l'application Id_E.
La symétrie par rapport à $\{\overrightarrow{0}\}$ parallèlement à E est l'application $-\mathrm{Id}_E$.

Définition 14.2.2 (projecteur d'un espace vectoriel)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

On sait déjà qu'une projection vectorielle est un projecteur, mais la réciproque est vraie :

Proposition 14.2.1 (équivalence entre projecteur et projection vectorielle)
Si p est un projecteur de l'espace vectoriel E, on a : $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}\,(p)$.
L'application p est alors la projection vectorielle sur $\operatorname{Im}\,(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

On sait déjà qu'une symétrie vectorielle est involutive, mais la réciproque est vraie :

Proposition 14.2.2 (équivalence entre endomorphisme involutif et symétrie vectorielle)
Si s est un endomorphisme involutif de E, donc si $s \circ s = \operatorname{Id}_E$, on a : $E = \operatorname{Inv}(s) \oplus \operatorname{Opp}(s)$.
L'application s est alors la symétrie vectorielle par rapport à $\operatorname{Inv}(s)$ parallèlement à $\operatorname{Opp}(s)$.

Remarque importante

Si f est un endomorphisme de E, beaucoup de choses sont possibles entre $\operatorname{Im}\,(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$.
Par exemple l'inclusion $\operatorname{Im}\,(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$ équivaut à $f \circ f = 0$.
En particulier, on n'interprétera pas abusivement la propriété $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}\,(f)$.
On montre en fait que : $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}\,(f) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f) \\ \operatorname{Im}\,(f^2) = \operatorname{Im}\,(f) \end{cases}$ (ce qui n'équivaut pas à $f^2 = f$)

14.3 Détermination des applications linéaires

14.3.1 Applications linéaires et familles de vecteurs

Proposition 14.3.1 (applications linéaires et familles génératrices)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F.
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E.
Alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est génératrice dans $\operatorname{Im}\,(f)$.
En particulier, si f est surjective, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est génératrice dans F.

Une application linéaire *surjective* transforme donc une famille génératrice en une famille génératrice.

Proposition 14.3.2 (applications linéaires et familles libres)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et soit f une application linéaire de E dans F.
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.
Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est liée.
Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre et si f est injective, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre.

Une application linéaire *injective* transforme donc une famille libre en une famille libre.

Proposition 14.3.3 (image d'une base par un isomorphisme)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et soit f un isomorphisme de E sur F.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est une base de F.

Une application linéaire *bijective* transforme donc une base en une base.

On peut finalement énoncer un résultat plus général, qui indique qu'une application linéaire f est *déterminée de manière unique par les images des vecteurs d'une base*. De plus les propriétés de la famille image renseignent sur les propriétés de f (injectivité, surjectivité) :

Proposition 14.3.4 (applications linéaires et bases)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$.
Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille quelconque *de vecteurs de F.*
Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que : $\forall\, i \in I, f(e_i) = v_i$.
- *l'application f est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans F.*
- *l'application f est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice dans F.*
- *l'application f est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de F.*

On retiendra en particulier :

Soit $f = E \to F$ une application linéaire.
L'application f est un isomorphisme si et seulement si f transforme *une* base de E en une base de F.
Elle transforme alors *toute* base de E en une base de F.

14.3.2 Restrictions aux sous-espaces d'une somme directe

Soit E un espace vectoriel et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces de E telle que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i$.

Soit f une application linéaire de E dans un espace vectoriel F.

Pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, soit f_i la restriction de f à E_i (c'est un élément de $\mathcal{L}(E_i, F)$).
Si $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ (avec u_i dans E_i), on a $f(u) = f\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\Bigr) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(u_i)$, c'est-à-dire $f(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(u_i)$.

Ainsi, connaître la restriction de f à chaque E_i permet de « reconstruire » f de manière unique.

Réciproquement, pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$ on se donne φ_i linéaire de E_i dans F.

Alors il existe une et une seule application linéaire de E dans F telle que $f_{|E_i} = \varphi_i$ pour tout i.

Toujours avec la notation $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, cette application f est définie par $f(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(u_i)$.

14.3.3 Isomorphismes et dimensions

En dimension finie, les résultats précédents ont une conséquence immédiate et importante :

Proposition 14.3.5 (conservation de la dimension par isomorphisme)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et soit f un isomorphisme de E sur F.
Si E est de dimension finie, alors F est de dimension finie et on a $\dim(F) = \dim(E)$.

Plus généralement, la proposition suivante indique que la notion de dimension permet d'effectuer une véritable classification des espaces de dimension finie.

Proposition 14.3.6 (espaces isomorphes à un espace de dimension finie)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant de dimension finie.
On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de E sur F.
Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Isomorphisme défini par les images des vecteurs d'une base

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension $n \geqslant 1$.
Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E, et soit $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de F.
L'isomorphisme f de E sur F qui tranforme chaque e_i en ε_i est défini par : $f\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\Bigr) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$.

Autrement dit, f est l'application qui envoie un vecteur u de E sur le vecteur v de F qui a (dans la base $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$) les mêmes coordonnées que u dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Importance de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
Si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, alors $\varphi\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_i\, u_i$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E.
Ainsi $\mathbb{K}^n$ est l'exemple-type du $\mathbb{K}$-espace de dimension n, sa base canonique étant la plus « naturelle ».

La dimension de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E.
Soit F un espace vectoriel quelconque (donc pas forcément de dimension finie).
Soit φ l'application définie sur $\mathcal{L}(E, F)$ par $\varphi(f) = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.
Alors φ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur F^n.
Dans le cas où F est lui-même de dimension finie, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 14.3.7 (dimension de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$)
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Alors l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie. Plus précisément : $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\dim(F)$.

14.3.4 Applications linéaires de rang fini

Définition 14.3.1 (application linéaire de rang fini)
Soit f une application linéaire de E dans F.
On dit que f est *de rang fini* si $\mathrm{Im}\ (f)$ est un sous-espace de dimension finie de F.
Si cette condition est réalisée, on dit que $\dim(\mathrm{Im}\ (f))$ est le rang de f (et on le note $\mathrm{rg}\,(f)$).

La condition précédente est automatiquement réalisée si l'espace d'arrivée F est de dimension finie p.
En effet $\mathrm{Im}\ (f)$ est un sous-espace F, donc $\mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\ (f)) \leqslant p$.
On a $\mathrm{rg}\,(f) = \dim(F)$ si et seulement si $\mathrm{Im}\ (f) = F$, c'est-à-dire si et seulement si f est surjective.

Invariance du rang par composition par un isomorphisme

Soit E_1, E_2, E_3, E_4 des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Soit φ un isomorphisme de E_1 sur E_2, et soit Ψ un isomorphisme de E_3 sur E_4.

Soit f une application linéaire de E_2 dans E_3, de rang fini.

Alors $f \circ \varphi$ et $\psi \circ f$ sont également de rang fini, et : $\mathrm{rg}\,(f \circ \varphi) = \mathrm{rg}\,(\psi \circ f) = \mathrm{rg}\,(f)$.

14.3.5 Le théorème du rang et ses conséquences

Le résultat suivant est très (très !) important :

Proposition 14.3.8 (théorème du rang)
Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie.
Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ *dans E.*
Alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\ (f)$.
Il en résulte que $\mathrm{Im}\ (f)$ *est un sous-espace de dimension finie de F (ou encore : f est de rang fini).*
Mais plus précisément, on a l'égalité : $\dim(E) = \mathrm{rg}\,(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

On voit que $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \dim(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective.

On pourra interpréter ce résultat en disant qu'une application linéaire « ne crée pas de dimension ». Tout au plus, elle « conserve la dimension » si elle est injective.

Les notions de rang d'une application linéaire et de rang d'une famille de vecteurs se rejoignent.
En effet, si $f : E \to F$ est linéaire, si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ est une base de E, alors : $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Proposition 14.3.9 (caractérisation des isomorphismes en cas de dimensions égales)
Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension n.
Soit f une application linéaire de E dans F.
Alors on a les équivalences : f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

On sait que pour montrer qu'une application linéaire f est bijective, une possibilité est d'exhiber un isomorphisme réciproque, c'est-à-dire une application linéaire g telle que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}$.

On sait également que la composition des applications linéaires n'est pas commutative, donc qu'il faut a priori vérifier les *deux* égalités $g \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}$.

On va voir qu'une seule de ces deux égalités est suffisante si E et F sont de même dimension finie, et notamment si f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Définition 14.3.2 (inversibilité à gauche ou à droite)
Soit E, F deux espaces vectoriels quelconques, et soit f une application linéaire de E dans F.
On dit que f est « inversible à gauche » s'il existe $g : F \to E$, linéaire, telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
On dit que f est « inversible à droite » s'il existe $h : F \to E$, linéaire, telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$.

Il est clair que si f est inversible à gauche (resp. à droite) elle est injective (resp. surjective).

Si f est inversible à gauche <u>et</u> à droite, alors f est un isomorphisme de E sur F, et (avec les notations précédentes) on a les égalités $g = h = f^{-1}$.

Proposition 14.3.10 (équivalence entre inversibilité à droite et à gauche en même dimension)
Soit E, F deux espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $f : E \to F$, linéaire.
Alors f est inversible à gauche si et seulement si elle est inversible à droite.

On retiendra que pour montrer qu'un endomorphisme f d'un espace E de dimension finie est un automorphisme de E, il suffit de vérifier l'une des deux égalités $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ (l'autre étant alors automatiquement vérifiée, et on a alors $g = f^{-1}$).

14.4 Formes linéaires, hyperplans

14.4.1 Formes linéaires

Définition 14.4.1 (formes linéaires sur un espace vectoriel)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Remarques et exemples

– Si une forme linéaire f n'est pas identiquement nulle, alors elle est surjective (et donc de rang 1).
– L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2x - 3y + 5z$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
– L'application $\varphi : f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.
– Soit $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ l'espace des applications définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$
Soit x_0 un élément de I. L'application $\varphi : f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire sur E.

Définition 14.4.2 (formes linéaires coordonnées)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.
On sait que tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = \displaystyle\sum_{i\in I} x_i e_i$ (somme à support fini).
Pour tout i de I, on note e_i^* l'application qui au vecteur u associe sa coordonnée x_i sur le vecteur e_i.
Les applications $(e_i^*)_{i\in I}$ sont des formes linéaires sur E.
On les appelles les « formes linéaires coordonnées » sur E relativement à la base $(e_i)_{i\in I}$.

Proposition 14.4.1 (en dimension finie, les formes linéaires coordonnées forment une base)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie n. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E.
Alors la famille $(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des formes linéaires coordonnées est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Soit E un espace de dimension finie n, muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Soit f une forme linéaire sur E.
Alors f s'écrit, de manière unique : $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i^*$. Dans cette écriture on a $a_i = f(e_i)$.
Autrement dit, f est définie de façon unique sous la forme : $f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_i\, x_i$.

Considérons par exemple $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

Les formes linéaires coordonnées sont définies par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} e_1^*(x,y,z) = x \\ e_2^*(x,y,z) = y \\ e_3^*(x,y,z) = z \end{cases}$

Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ sont les applications $f = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$, où (a,b,c) est dans $\mathbb{R}^3$.

Ou encore : les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ sont les applications $(x,y,z) \mapsto ax + by + cz$.

Par exemple si f est définie par $f(x,y,z) = 2x - 3y + 5z$, on a $f(e_1) = 2$, $f(e_2) = -3$ et $f(e_3) = 5$.

14.4.2 Hyperplans vectoriels

Définition 14.4.3 (hyperplans d'un espace vectoriel)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit H un sous-espace vectoriel de E.
On dit que H est un *hyperplan* de E s'il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \operatorname{Ker} f$.

Proposition 14.4.2 (caractérisations des hyperplans)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit H un sous-espace vectoriel de E.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
– *le sous-espace H est un hyperplan de E.*
– *pour toute droite vectorielle D non incluse dans H, on a $E = H \oplus D$.*
– *il existe une droite vectorielle D non incluse dans H, telle que $E = H \oplus D$.*

On dispose finalement de trois caractérisations des hyperplans de E :

– les hyperplans de E sont les sous-espaces de E qui sont supplémentaires d'une droite vectorielle.
– les hyperplans de E sont les noyaux des formes linéaires non nulles sur E.
– si $\dim(E) = n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Proposition 14.4.3 (formes linéaires non nulles ayant le même noyau)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et soit f, g deux formes linéaires non nulles sur E.
Alors f et g ont le même hyperplan noyau si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Équations d'un hyperplan

Si H est un hyperplan de E et si f est une forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} f$, alors l'égalité $f(x) = 0$ (où x est quelconque dans E) est appelée une *équation* de l'hyperplan H.

La propriété précédente dit que l'équation d'un hyperplan est unique à un facteur multiplicatif près :

Proposition 14.4.4 (équation d'un hyperplan en dimension finie)
Soit E un espace de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Soit H un hyperplan de E.
L'équation de H s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, où les x_i sont les coordonnées d'un vecteur quelconque u.
Cette équation est unique à un facteur multiplicatif non nul près.

Hyperplans de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

– Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.
Si $\mathbb{R}^2$ est muni d'une base e_1, e_2, et si on note (x, y) les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base, l'équation d'une droite D de $\mathbb{R}^2$ s'écrit d'une manière unique (à un facteur multiplicatif non nul près) sous la forme $ax + by = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Sous cette forme, un vecteur directeur de D est le vecteur $u = -be_1 + ae_2$.

– Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Si $\mathbb{R}^3$ est muni d'une base e_1, e_2, e_3, et si on note (x, y, z) les coordonnées d'un vecteur u quelconque dans cette base, l'équation d'un plan P de $\mathbb{R}^3$ s'écrit d'une manière unique (à un facteur multiplicatif non nul près) sous la forme $ax + by + cz = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Sous cette forme, et si par exemple $a \neq 0$, une base de ce plan est formée des vecteurs $\begin{cases} u_1 = -be_1 + ae_2 \\ u_2 = -ce_1 + ae_3 \end{cases}$

14.4.3 Systèmes d'équations de sous-espaces vectoriels

Proposition 14.4.5 (intersection de deux hyperplans dans un espace de dimension n)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit H et K deux hyperplans distincts de E. Alors $\dim(H \cap K) = n - 2$.

Par exemple, l'intersection de deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle.

Proposition 14.4.6 (intersection de m hyperplans dans un espace de dimension n)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
On se donne m hyperplans $H_1, H_2, \ldots, H_m$ de E. Alors $\dim\Big(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\Big) \geqslant n - m$.

Un exemple

On se place dans $\mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique.
Soit H_1, H_2, H_3 les hyperplans d'équations respectives : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

Soit $F = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. D'après la proposition précédente $\dim(F) \geqslant 5 - 3 = 2$.

Pour déterminer F, on applique la méthode du pivot au système (S) formé par ces trois équations :

En appliquant $\begin{cases} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{cases}$ on trouve $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_2 - 5x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

En appliquant $\begin{cases} \mathrm{L}_1 \leftarrow 3\mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 3\mathrm{L}_3 - 4\mathrm{L}_2 \end{cases}$, on a $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_3 - 12x_4 + 18x_5 = 0 \end{cases}$

Après $\begin{cases} \mathrm{L}_1 \leftarrow 5\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \end{cases}$, on trouve $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 15x_1 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_2 - 9x_4 + 15x_5 = 0 \\ 5x_3 - 12x_4 + 18x_5 = 0 \end{cases}$

Ainsi $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in E \Leftrightarrow \Big(x_1 = -\dfrac{1}{5}(x_4 + x_5),\ x_2 = 3x_4 - 5x_5,\ x_3 = \dfrac{1}{5}(12x_4 - 18x_5)\Big)$

On encore : $u \in E \Leftrightarrow u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \dfrac{x_4}{5}(-1, 15, 12, 5, 0) - \dfrac{x_5}{5}(1, 25, 18, 0, -5)$.

Dans cette expression, les composantes x_4 et x_5 sont arbitraires.

Ainsi F est le plan de $\mathbb{R}^5$ engendré par les deux vecteurs indépendants $\begin{cases} u_1 = (-1, 15, 12, 5, 0) \\ u_2 = (1, 25, 18, 0, -5) \end{cases}$

Voici un résultat qui énonce la réciproque de la proposition précédente.

Proposition 14.4.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

Soit F un sous-espace de E, de dimension m, avec $0 \leqslant m \leqslant n-1$.

Alors F peut s'écrire comme l'intersection de $n-m$ hyperplans de E.

Système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel

Si $\dim(F) = m \leqslant n-2$, c'est-à-dire si F n'est pas lui-même un hyperplan de E, l'écriture de F comme intersection de $n-m$ hyperplans est loin d'être unique.

Soit $F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$ une telle écriture du sous-espace F.

Si on munit E d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, chaque hyperplan H_i est défini par une équation cartésienne (E_i) définie elle-même de façon unique à un facteur multiplicatif non nul près.

Le système formé par ces $n-m$ équations est appelé un « système d'équations » de F.

Un exemple

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique.

Soit F le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les deux vecteurs $\begin{cases} v_1 = (1, -1, 2, 1) \\ v_2 = (1, 1, 3, -2) \end{cases}$

On va écrire F comme l'intersection de $n-m$ hyperplans, avec ici $n - m = 4 - \dim(F) = 4 - 2 = 2$.

Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Dire que u est dans F, c'est dire que la famille (v_1, v_2, u) est de rang 2.

On procède par opérations élémentaires (elles ne modifient pas le rang d'une famille de vecteurs).

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 2 & 3 & z \\ 1 & -2 & t \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & -2x+z \\ 0 & -3 & -x+t \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow 2\mathrm{L}_4 + 3\mathrm{L}_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -5x-y+2z \\ 0 & 0 & x+3y+2t \end{array}\right)$$

Les deux premiers vecteurs obtenus sont indépendants et leurs coefficients sont « échelonnés ».

Dire que la famille obtenue est de rang 2, c'est dire qu'on a $\begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2t = 0 \end{cases}$

On a ainsi obtenu un système d'équations de F.