Chapitre 18

Déterminants

Sommaire

18.1 Le groupe symétrique

18.1.1 Permutations de l'ensemble $E_n = \{1, \ldots, n\}$

Définition 18.1.1 (groupe symétrique d'indice n)
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $E_n = \{1, \ldots, n\}$.
On appelle *permutation* de E_n, toute bijection de E_n sur lui-même.
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble de toutes les permutations de E_n.
L'ensemble $\mathcal{S}_n$ est un groupe pour la loi de composition, appelé *groupe symétrique* d'indice n.
Le groupe $\mathcal{S}_n$ est d'ordre $n!$, et il est non commutatif dès que $n \geqslant 3$.

Remarque : on écrira $\sigma_2\sigma_1$ (plutôt que $\sigma_2 \circ \sigma_1$) pour désigner la composée de σ_1 par σ_2.

Un élément σ de $\mathcal{S}_n$ est représenté par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

En particulier l'application identité, neutre du groupe $\mathcal{S}_n$, se note $\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

Pour prendre un exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ représente l'élément σ de $\mathcal{S}_6$ défini par :

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 5, \quad \sigma(3) = 1, \quad \sigma(4) = 4, \quad \sigma(5) = 6, \quad \sigma(6) = 2$$

On voit facilement que $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (lire le tableau σ à partir de sa deuxième ligne).

Si $n = 1$, le groupe $\mathcal{S}_1$ se réduit à l'application identité de $E_1 = \{1\}$ dans lui-même.

Si $n = 2$, $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$, où σ est définie par : $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$.

Si $n = 3$, $\mathcal{S}_3$ est formé de six éléments :

$$\sigma_0 = \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_4^2$$

Le groupe $(\mathcal{S}_3, \circ)$ n'est pas commutatif : on vérifie par exemple que $\begin{cases} \sigma_1\,\sigma_3 = \sigma_5 \\ \sigma_3\,\sigma_1 = \sigma_4 \end{cases}$

18.1.2 Cycles

Définition 18.1.2 (les cycles sont des permutations particulières)
Soit σ un élément de $\mathcal{S}_n$, avec $n \geqslant 2$. Soit p un entier de $\{2, \ldots, n\}$.
On dit que σ est un *cycle* de longueur p s'il existe $a_1, a_2, \ldots, a_p$ distincts dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que :
– pour tout k de $\{1, \ldots, p-1\}$, $\sigma(a_k) = a_{k+1}$, et de plus $\sigma(a_p) = a_1$.
– pour tout élément b de $E_n \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$ on a $\sigma(b) = b$.
On dit alors que l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_p\}$ est le *support* du cycle σ.

Remarques

Le support d'un cycle σ est l'ensemble des éléments qui ne sont pas invariants par σ.
En général, on représente un cycle σ en écrivant $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \end{pmatrix}$.
Dans $\mathcal{S}_n$, un cycle de longueur n est appelé une *permutation circulaire*.

Exemples

Dans $\mathcal{S}_7$, la permutation $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Cette dernière notation ne dit pas que σ_1 est dans $\mathcal{S}_7$, mais qu'elle est dans $\mathcal{S}_n$ pour tout $n \geqslant 6$ (en principe le contexte est clair, mais de toutes façons c'est sans grande importance).

Le support de σ_1 est $\{1, 2, 4, 5, 6\}$. Les éléments 3 et 7 sont fixes par σ_1.

On remarque qu'on peut aussi écrire $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, ou $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \ldots$

En revanche la permutation $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un cycle.

Cependant on a visiblement $\sigma = s\,t = t\,s$, où $s = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathcal{S}_7$, la permutation $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est la permutation circulaire $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 18.1.1 (inverse d'un cycle)
Si σ est le cycle $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \end{pmatrix}$ alors σ^{-1} est le cycle $\begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$.

Attention, les puissances d'un cycle ne sont pas toujours des cycles.
Si par exemple $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ et $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$.

En revanche σ^5 est le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On montre que si σ est un cycle de longueur p, alors σ^k est un cycle si et seulement si $k \wedge p = 1$.

Proposition 18.1.2 (calcul des puissances d'un cycle)
Soit σ un cycle de longueur $p \geqslant 2$. Alors $\sigma^p = \mathrm{Id}$ et, pour tout k de $\{1, \ldots, p-1\}$, $\sigma^k \neq \mathrm{Id}$.
Pour tout entier relatif m, si $m = qp + r$ est la division euclidienne de m par p, alors $\sigma^m = \sigma^r$.

Proposition 18.1.3 (deux cycles à supports disjoints commutent)
Soit σ_1 et σ_2 deux cycles de $\mathcal{S}_n$.
On suppose que les supports de σ_1 et σ_2 sont disjoints. Alors $\sigma_2\,\sigma_1 = \sigma_1\,\sigma_2$.

Plus généralement, soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ une famille de m cycles de $\mathcal{S}_n$.
Si leurs supports sont disjoints deux à deux, alors les cycles σ_k commutent deux à deux.
Dans ce cas, et pour tout entier k, on peut alors écrire : $(\sigma_1 \cdots \sigma_m)^k = \sigma_1^k \cdots \sigma_m^k$.

18.1.3 Transpositions

Définition 18.1.3 (les transpositions sont les cycles de longueur 2)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit σ un élément de $\mathcal{S}_n$.
On dit que σ de $\mathcal{S}_n$ est une *transposition* si σ est un cycle $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de longueur 2.
Cela signifie qu'il existe a et b distincts dans E_n tels que $\begin{cases} \sigma(a) = b \text{ et } \sigma(b) = a \\ \forall\, c \notin \{a, b\},\ \sigma(c) = c \end{cases}$

Remarques

Une transposition est donc une permutation qui se contente d'échanger deux éléments.
On ne confondra pas les mots « permutation » et « transposition ».
Si $\tau = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, on a bien sûr : $\tau = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix},\ \ \tau^2 = \text{Id},\ \ \tau^{-1} = \tau$.
Soit $\tau_1 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ et $\tau_2 = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$ deux transpositions : on a $\tau_1\, \tau_2 = \tau_2\, \tau_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset \\ \text{ou } \{a, b\} = \{c, d\} \end{cases}$
Dans $\mathcal{S}_n$, il y a $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ transpositions (autant que de parties à deux éléments dans E_n).

18.1.4 Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Proposition 18.1.4 (décomposition en produit de cycles)
Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ (avec $n \geqslant 2$) se décompose en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Cette décomposition est dite commutative, car les cycles qui la composent commutent deux à deux.

Étude détaillée d'un exemple

Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 5 & 9 & 4 & 14 & 3 & 1 & 11 & 12 & 7 & 13 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

On a $\sigma(1) = 10$, $\sigma(10) = 7$, et $\sigma(7) = 1$. Il apparaît donc le cycle $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

En considérant les images successives de 2, on trouve le cycle $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 & 8 & 11 & 13 \end{pmatrix}$.

En considérant celles de 3 (qui n'est pas apparu dans σ_1 et σ_2) on trouve $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

On voit que $\sigma(4) = 4$, et les éléments restant dans $\{1, \ldots, 14\}$ sont tous apparus dans σ_1, σ_2, ou σ_3.
On peut donc écrire $\sigma = \sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3$.
Les supports de ces cycles sont respectivement $\{1, 7, 10\}$, $\{2, 5, 8, 11, 13, 14\}$ et $\{3, 6, 9, 12\}$.
Ils sont disjoints deux à deux : les cycles $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ commutent entre eux.
On pourrait donc aussi écrire : $\sigma = \sigma_3\, \sigma_2\, \sigma_1 = \sigma_1\, \sigma_3\, \sigma_2 = \sigma_2\, \sigma_3\, \sigma_1 = \cdots$
On en déduit également le calcul des puissances de σ : $\sigma^m = (\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3)^m = \sigma_1^m\, \sigma_2^m\, \sigma_3^m$.
Compte tenu des longueurs des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, on a : $\sigma_1^3 = \text{Id}$, $\sigma_2^6 = \text{Id}$, $\sigma_3^4 = \text{Id}$.
Le ppcm de $3, 6, 4$ est 12. On a donc $\sigma^{12} = (\sigma_1^3)^4\, (\sigma_2^6)^2\, (\sigma_3^4)^3 = \text{Id}$.

On vérifie que pour tout entier k compris entre 1 et 12 on a $\sigma^k \neq \mathrm{Id}$.

Si on veut calculer σ^m, on calcule les restes de m dans les divisions euclidiennes par $3, 6, 4$.

On observe par exemple que : $2014 \equiv 1 \bmod 3$, $2014 \equiv 4 \bmod 6$ et $2014 \equiv 2 \bmod 4$.
On en déduit $\sigma^{2014} = \sigma_1\,\sigma_2^4\,\sigma_3^2$.
Or $\sigma_2^4 = \begin{pmatrix}2 & 11 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 13 & 8\end{pmatrix}$, et $\sigma_3^2 = \begin{pmatrix}3 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 6\end{pmatrix}$.
On trouve donc : $\sigma^{2014} = \begin{pmatrix}1 & 10 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 11 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 13 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 6\end{pmatrix}$.
Finalement : $\sigma^{2014} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14\\ 10 & 11 & 12 & 4 & 13 & 9 & 1 & 5 & 6 & 7 & 14 & 3 & 8 & 2\end{pmatrix}$.
Enfin le calcul de σ^{-1} peut s'effectuer en écrivant :
$\sigma^{-1} = \sigma_1^{-1}\,\sigma_2^{-1}\,\sigma_3^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 7 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 13 & 11 & 8 & 14 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6 & 12 & 9\end{pmatrix}$.
On pouvait aussi trouver σ^{-1} directement (en lisant dans σ à partir de la ligne du bas) :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14\\ 7 & 13 & 6 & 4 & 2 & 12 & 10 & 14 & 3 & 1 & 8 & 9 & 11 & 5\end{pmatrix}$$

18.1.5 Décomposition en produit de transpositions

Proposition 18.1.5 (décomposition d'une permutation en produit de transpositions)
Tout cycle de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de transpositions.
Il en découle que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de transpositions.

Remarques

Il n'y a pas unicité de la décomposition d'une permutation en un produit de transpositions.
Par exemple : $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$.
Il y a une façon très simple de décomposer un cycle en produit de transpositions.
En effet : $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & a_3\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_k & a_{k+1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_{p-1} & a_p\end{pmatrix}$.
Pour décomposer une permutation quelconque σ en un produit de transpositions, il est judicieux d'écrire la permutation σ comme un produit de cycles σ_k à supports disjoints, puis d'écrire chaque σ_k comme un produit de transpositions. Par exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 4 & 7 & 3 & 8 & 6 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\end{pmatrix}$$

18.1.6 Signature d'une permutation

Définition 18.1.4 (signature d'une permutation)
Il existe une et une seule application ε de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ telle que :
– pour toute transposition τ, on a : $\varepsilon(\tau) = -1$.
– pour toutes permutations σ et σ', on a : $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.
L'application ε est appelée *signature*.

De par la définition (et parce que toute permutation peut s'écrire au moins d'une manière comme un produit de transpositions), il est clair que $\varepsilon(\sigma)$ est toujours égal 1 ou à -1.

Définition 18.1.5 (permutations paires ou impaires)
Soit σ un élément de $\mathcal{S}_n$, avec $n \geqslant 2$.
On dit que σ est une *permutation paire* si $\varepsilon(\sigma) = 1$.
On dit que σ est une *permutation impaire* si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Propriétés immédiates

– Par définition de la signature, les transpositions sont des permutations impaires.

– L'application identité est une permutation paire (elle est le carré d'une transposition quelconque).

– Une permutation σ et son inverse σ^{-1} ont la même signature.

– La composée de deux permutations de même parité est une permutation paire.
La composée de deux permutations de parités opposées est une permutation impaire.

– Si σ est une permutation paire, alors pour tout p de $\mathbb{Z}$ la permutation σ^p est paire.
Si σ est une permutation impaire, alors la permutation σ^p a la parité de l'entier relatif p.

Proposition 18.1.6 (signature et décompositions en produits de transpositions)
Soit σ une permutation de l'ensemble $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
La parité de σ est celle du nombre de facteurs dans toute décomposition de σ en produit de transpositions.

Dire qu'une permutation σ est paire (resp. impaire), c'est donc dire que les décompositions de σ en produits de transpositions comportent un nombre pair (resp. impair) de facteurs.

Proposition 18.1.7 (nombre de permutations paires, ou impaires)
Dans $\mathcal{S}_n$, il y a autant de permutations paires que de permutations impaires, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\,n!$.

Proposition 18.1.8 (signature d'un cycle)
La signature d'un cycle σ de longueur p est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$. Autrement dit :
– un cycle de longueur paire est une permutation impaire.
– un cycle de longueur impaire est une permutation paire.

Pour calculer la signature d'un élément σ de $\mathcal{S}_n$, le plus simple est souvent de décomposer σ en cycles à supports disjoints $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_p$ et d'écrire $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\,\varepsilon(\sigma_2) \cdots \varepsilon(\sigma_p)$.

Par exemple : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 8 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1 \circ \sigma_2 \quad$ avec $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

On a $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = -1$, donc $\varepsilon(\sigma) = -1$: la permutation σ est impaire.

18.2 Formes n-linéaires alternées

18.2.1 Applications multilinéaires

Définition 18.2.1 (applications multilinéaires)
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f une application de E^n dans $\mathbb{K}$, avec $n \geqslant 1$.
On dit que f est n-linéaire si elle vérifie la propriété suivante :
Pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout choix des vecteurs $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ dans E, l'application f_i de E dans F définie par $f_i(v) = f(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ est linéaire.

Une application $f\colon E^n \to F$ est donc n-linéaire (on dit aussi « multilinéaire ») si elle est « linéaire par rapport à chacune de ses variables quand on fixe toutes les autres ».

Remarques et propriétés

– Pour $n = 1$, la n-linéarité se confond avec la linéarité.
  Si $n = 2$, on parle d'application *bilinéaire*. Si $n = 3$, on parle d'application *trilinéaire*.
  Si $F = \mathbb{K}$, on parle de *forme* n-linéaire.
– Si $f : E^n \to F$ est n-linéaire et si l'un des u_i est nul, alors $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \overrightarrow{0}$.
  Cela résulte en effet de la linéarité par rapport à la i-ième composante.
– Une application f de E^2 dans F est bilinéaire si et seulement si :
  pour tous vecteurs u, u', v, v' de E, et pour tous scalaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:
$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta u', \gamma v + \delta v') &= \alpha f(u, \gamma v + \delta v') + \beta f(u', \gamma v + \delta v') \\ &= \alpha\gamma f(u, v) + \alpha\delta f(u, v') + \beta\gamma f(u', v) + \beta\delta f(u', v') \end{aligned}$$
– Si $n \geqslant 2$, on ne confondra pas linéarité et n-linéarité.
$$\text{Par exemple } \begin{cases} \text{si } f \text{ est linéaire, } f(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) = \lambda f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \text{si } f \text{ est } n\text{-linéaire, } f(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) = \lambda^n f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{cases}$$
$$\text{De même, si } n = 2 \begin{cases} \text{si } f \text{ linéaire, } f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u', v') = f(u, v') + f(u', v) \\ \text{si } f \text{ est bilinéaire, } f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u, v') + f(u', v) + f(u', v') \end{cases}$$

18.2.2 Formes multilinéaires alternées

Définition 18.2.2 (formes multilinéaires alternées sur un espace de dimension n)
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire. On dit que f est *alternée* (ou encore *antisymétrique*) si :
$$\begin{cases} \forall\, (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n \\ \forall\, (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \text{ avec } i \neq j \end{cases} \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n).$$
Autrement dit : l'application $f\colon E^n \to \mathbb{K}$ est dite alternée si l'échange de deux vecteurs quelconques dans la liste $(u_1, \ldots, u_n)$ change le scalaire $f(u_1, \ldots, u_n)$ en son opposé.
On note $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des « formes n-linéaires alternées sur E ».

Attention à la terminologie : on parle de formes n-linéaires alternées « sur E », et on note $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$, mais il s'agit bien d'applications qui sont définies sur E^n et qui sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Il faut bien noter que l'entier n est présent deux fois dans la définition : d'une part il représente la dimension de E, et d'autre part l'exposant dans le domaine E^n de f.

On vérifie facilement que $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (à suivre !).

Proposition 18.2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.

- *si deux des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont égaux, alors $f(u_1, \ldots, u_n) = 0$*
- *on ne modifie pas $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en ajoutant à l'un des u_i une combinaison linéaire des* ***autres***
- *si les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont liés, alors $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$*

Démonstration

On se donne donc n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E.

- On suppose que deux d'entre eux, à savoir u_i et u_j avec $i \neq j$, sont égaux.
  Les deux quantités $f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n)$ et $f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$ sont donc identiques car $u_i = u_j$, et opposées car f est alternée.
  Autrement dit cette quantité est nulle, ce qu'il fallait démontrer.
- On choisit un indice i de $\{1, \ldots, n\}$ et on pose $u'_i = u_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j u_j$.
  En utilisant la linéarité de f par rapport à sa i-ième variable, on trouve :
  $f(u_1, \ldots, u'_i, \ldots, u_n) = f(u_1, \ldots, u_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j u_j, \ldots, u_n)$
  $= f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) + \sum_{j\neq i} \lambda_j f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n)$
  Dans la dernière somme, toutes les images par f sont nulles car le vecteur u_j figure deux fois dans la liste $u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n$, en i-ième et en j-ème position.
  On a en déduit donc l'égalité de $f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$ et $f(u_1, \ldots, u'_i, \ldots, u_n)$.
- On suppose maintenant que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont liés.
  Cela signifie que u_i, par exemple, est combinaison linéaire des autres vecteurs u_j.
  Autrement dit il existe des coefficients λ_j tels que $u_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j u_j$.
  On sait qu'on ne change pas $f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$ si on remplace u_i par $u_i - \sum_{j\neq i} \lambda_j u_j = \overrightarrow{0}$.
  Par conséquent, d'après (a) : $f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = f(u_1, \ldots, \overrightarrow{0}, \ldots, u_n) = \overrightarrow{0}$.

Proposition 18.2.2 (caractère alterné et permutation sur l'ordre des vecteurs)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension $n \geqslant 1$.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée.

Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et soit $\varepsilon(\sigma)$ sa signature.

Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de E, on a : $f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

18.2.3 Application « déterminant dans une base »

Proposition 18.2.3 (forme nécessaire d'une forme n-linéaire alternée)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $e = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Soit $f\colon E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Posons $\lambda = f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Alors l'application f est déterminée de manière unique par le scalaire λ, en effet :

– *soit* $u=(u_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ *une famille de* n *vecteurs quelconques de* E*, de matrice* $A=(a_{i,j})$ *dans* e*.*
– *alors* $f(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\lambda\Big(\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j)j}\Big)$ *(somme sur les* $n!$ *permutations* σ *de* $\{1,2,\ldots,n\}$*)*

Définition 18.2.3 (application déterminant dans une base)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\geqslant 1$, muni d'une base $e=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Soit $u=(u_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E, et $A=(a_{i,j})$ la matrice de cette famille dans e.
On pose $\det_e(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j)j}$ (somme étendue aux $n!$ permutations σ de $\{1,2,\ldots,n\}$)
L'application $\det_e\colon E^n\to\mathbb{K}$ ainsi définie est appelée « application déterminant dans la base e ».

Cas particulier des petites dimensions

– Si $n=1$ (E est une droite vectorielle), soit e un vecteur non nul de E.
Pour tout vecteur $u=ae$ de E, on a : $\det_e(u)=a$.
– Si $n=2$: Soit $e=(e_1,e_2)$ une base du plan E.
Soit $u=ae_1+a'e_2$ et $v=be_1+b'e_2$, donc $A=\begin{pmatrix}a&b\\a'&b'\end{pmatrix}$. Alors $\det_e(u,v)=ab'-a'b$.
– Si $n=3$: Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E.
Soit $u=ae_1+a'e_2+a''e_3$, $v=be_1+b'e_2+b''e_3$, et $w=ce_1+c'e_2+c''e_3$ donc $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\a''&b''&c''\end{pmatrix}$.
Alors $\det_e(u,v,w)=a\,b'\,c''-a\,b''\,c'-a'\,b\,c''+a'\,b''\,c+a''\,b\,c'-a''\,b'\,c$.

Proposition 18.2.4 (l'application $\det_e$ est n-linéaire alternée, et non nulle)
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n\geqslant 1$*. Soit* $e=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une base de* E*.*
Alors l'application $\det_e\colon E^n\to\mathbb{K}$ *est* n*-linéaire alternée sur* E*, et elle vérifie* $\det_e(e_1,e_2,\ldots,e_n)=1$

Proposition 18.2.5 (la droite des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n)
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n\geqslant 1$*. Soit* $e=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une base de* E*.*
Pour toute forme n*-linéaire alternée* f *sur* E*, on a :* $f=\lambda\det_e$*, avec* $\lambda=f(e_1,e_2,\ldots,e_n)$*.*
L'espace $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ *est une droite vectorielle, et l'application* $\det_e$ *est une base de cette droite.*
L'application $\det_e$ *est en fait l'unique élément* f *de* $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ *tel que* $f(e_1,e_2,\ldots,e_n)=1$*.*

Démonstration

Soit f une forme n-linéaire alternée sur E^n.
Soient $u_1,u_2,\ldots,u_n$ une famille de n vecteurs quelconques de E.
Pour tout vecteur u_j de E, on note $u_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,e_i$ la décomposition de u_j dans la base (e).

En utilisant le caractère n-linéaire de f, on obtient le développement suivant :
$f(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\sum a_{i_1 1}\,a_{i_2 2}\,\ldots\,a_{i_n n}\,f(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_n})$
où les indices $i_1,i_2,\ldots,i_n$ parcourent indifféremment $\{1,\ldots,n\}$.

Puisque f est alternée, il ne subsiste dans cette somme que les images $f(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_n})$ où $i_1,i_2,\ldots,i_n$ sont distincts deux à deux, c'est-à-dire s'écrivent $i_1{=}\sigma(1),\ldots,i_n{=}\sigma(n)$, où σ est une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ (c'est-à-dire une bijection de cet ensemble sur lui-même.)

Le développement de $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ s'écrit donc :
$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$,
cette somme étant étendue à toutes les permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$.

Mais on sait que $f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la *signature* de σ c'est-à-dire $+1$ ou -1 suivant que σ peut se décomposer en un nombre pair ou un nombre impair d'échanges de deux éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

On peut donc écrire : $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \left(\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \right) f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

On note φ l'application définie par : $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$.

— On vérifie facilement que $\varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$.
  En effet on a alors $a_{\sigma(j)j} = \delta_{\sigma(j)j}$ et la seule permutation σ pour laquelle le produit des $a_{\sigma(j)j}$ est non nul est l'identité, de signature 1 car elle ne nécessite aucun échange.
  Dans ces conditions $\varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \prod_{j=1}^{n} \underbrace{a_{jj}}_{1} = 1$

— On constate également que l'application φ est n-linéaire. On admet qu'elle est alternée.

Il en résulte que φ est un élément non nul de $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$.
De plus tout élément f de $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ s'écrit $f = \lambda\varphi$, avec $\lambda = f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Ainsi $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ est bien une droite vectorielle, et φ est la seule forme n-linéaire alternée sur E^n telle que $\varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$.

18.2.4 Relation entre applications « déterminant dans une base »

Proposition 18.2.6 (relation entre deux applications « déterminant dans une base »)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit $e = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux bases de E.
Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de E, on a :
$\det_{\varepsilon}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_{\varepsilon}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \det_e(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

D'une façon plus compacte, le résultat précédent peut s'écrire : $\det_{\varepsilon}(u) = \det_{\varepsilon}(e) \det_e(u)$.

Démonstration

Cela résulte du fait que l'application $\mathrm{Det}_{\varepsilon}$ est une forme n-linéaire alternée sur E^n.
On a donc l'égalité $\mathrm{Det}_{(\varepsilon)} = \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(e_1, e_2, \ldots, e_n)\mathrm{Det}_{(e)}$, ce qui est le résultat attendu.

Proposition 18.2.7 (caractérisation des bases)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $e = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
Soit $u = (u_i)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E.
La famille (u) est une base de E si et seulement si $\det_e(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$.

Démonstration – Supposons que (ε) soit une base de E. La proposition précédente permet d'écrire :
$\mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(e_1, e_2, \ldots, e_n)\mathrm{Det}_{(e)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = 1$.
Il en découle que $\mathrm{Det}_{(e)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ est non nul.
On constate même que les déterminants $\mathrm{Det}_{(e)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ et $\mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sont inverses l'un de l'autre.
– Réciproquement, si la famille (ε) est liée, on sait que $\mathrm{Det}_{(e)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = 0$.

18.3 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

18.3.1 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 18.3.1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme de E.
Le scalaire $\det_e(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est indépendant de la base e choisie dans E.
On l'appelle le déterminant *de l'endomorphisme f, et on le note* $\det(f)$.

Démonstration
Soit $e = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux bases de E.
Il faut montrer : $\det_e(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) = \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \ldots, f(\varepsilon_n))$.
Soit φ définie sur E^n par $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))$.
La n-linéarité de φ résulte de la linéarité de f et de la n-linéarité de l'application $\mathrm{Det}_{(\varepsilon)}$.
Le caractère alterné de φ résulte aussi de celui de l'application $\mathrm{Det}_{(\varepsilon)}$ (si on échange deux vecteurs dans $u_1, u_2, \ldots, u_n$, l'image $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est changée en son opposée.)
L'application φ est donc une forme n-linéaire alternée.
Puisque $\mathrm{Det}_{(\varepsilon)}$ est une base de $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$, il existe un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}$.
Le scalaire λ n'est autre que $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \ldots, f(\varepsilon_n))$.
En particulier, $\varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \lambda \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Mais par ailleurs,

$$\begin{aligned} \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n) &= \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) \\ &= \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \det_e(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) \end{aligned}$$

Dans les deux expressions obtenues pour $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, on peut simplifier par le déterminant non nul $\mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
On en déduit $\lambda = \det_e(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$, ce qui est le résultat attendu.

Propriétés immédiates

Par définition, le déterminant d'un endomorphisme f est égal au déterminant dans la base e des images par f des vecteurs de e, et ceci pour toute base de E.

En particulier, le déterminant de l'application Id vaut 1.
En effet ce déterminant est égal à $\det_e(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, pour une base e quelconque.

Pour tout endomorphisme f, tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et toute base e, on a :
$\det_e(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)) = \det(f)\ \det_e(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Démonstration
Comme dans la démonstration de la proposition précédente, cela résulte du fait que $\psi : (u_1, u_2, \ldots, u_n) \to \det_e(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n))$ est n-linéaire alternée.
Il existe donc un scalaire λ tel que $\psi = \lambda \det_e$, et $\lambda = \psi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \det f$.

Proposition 18.3.2 (déterminant du composé de deux endomorphismes)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit f et g deux endomorphismes de E. Alors $\det(gf) = \det(g)\,\det(f)$.

Rappel : on note gf plutôt que $g \circ f$.

Démonstration
Soit (e) une base quelconque de E.
Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de E, on a l'égalité :
$\det_e(g(u_1), g(u_2), \cdots, g(u_n)) = \det g\ \det_e(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.
Si on pose en particulier $u_1 = f(e_1), u_2 = f(e_2), \ldots, u_n = f(e_n)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\det(g \circ f) &= \det_e(g \circ f(e_1), \cdots, g \circ f(e_n)) \\ &= \det g\ \det_e(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \det g\ \det f\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer

Proposition 18.3.3 (déterminant d'un automorphisme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit f un endomorphisme de E.
Alors f est un automorphisme si et seulement $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas : $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Démonstration
Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.
Par définition, $\det f = \det_e(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.
Or f est un automorphisme de E
- $\Leftrightarrow$ f transforme la base e en une base de E
- $\Leftrightarrow$ $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ sont libres
- $\Leftrightarrow$ leur déterminant dans la base e est non nul : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Supposons effectivement que f soit un automorphisme de E.
Alors $\det f^{-1}\ \det f = \det(f^{-1} \circ f) = \det \mathrm{Id}_E = 1$ ce qui prouve que : $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$.

Proposition 18.3.4 (déterminant des puissances d'un endomorphisme)
Soit f un endomorphisme de E et soit p un entier naturel. Alors $\det(f^p) = (\det f)^p$.
Ce résultat se généralise aux exposants négatifs si f est un automorphisme.

Démonstration
Pour tous endomorphismes f et g de E, on sait que $\det(g \circ f) = \det g\ \det f$.
On en déduit par une récurrence évidente que $\det(f_p \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1) = \prod_{k=1}^{p} \det f_k$.
L'égalité $\det(f^p) = (\det f)^p$ est un cas particulier de ce résultat.
Si f est un automorphisme, on applique ce qui précède à f^{-1}, ce qui donne le résultat pour les exposant négatifs.

18.3.2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 18.3.1 (déterminant d'une matrice carrée)
Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On pose $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$, où la somme est étendue aux $n!$ permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Cette définition, qui exprime $\det(A)$ comme une expression développée des coefficients, est « neutre ».
En variant les points de vue, on aboutit en fait à plusieurs définitions équivalentes possibles...

Définitions équivalentes du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Soit $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteurs-colonne de A, considérés comme des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
  Alors $\det(A)$ est le déterminant de la famille $(C_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les vecteurs-colonne de A, considérés comme des éléments de $\mathbb{K}^n$.
  Alors $\det(A)$ est le déterminant de la famille $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Soit E un espace vectoriel quelconque sur $\mathbb{K}$, de dimension n, muni d'une base $e = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
  Soit $v = (v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ la famille de E telle que $A = \mathrm{Mat}_e(v)$: alors $\det(A) = \det_e(v)$.
- Soit $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, linéaire, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$: alors $\det(A) = \det(f)$.
  (ici f est l'application linéaire canoniquement associée à A).

En Python, on dispose de la fonction `det`, dans le module `np.linalg`.

Dans l'exemple ci-contre, on forme une matrice aléatoire d'ordre 3, à coefficients entiers dans $[\![0, 9]\!]$, et on calcule son déterminant.

Le résultat est renvoyé au format `float`, mais c'est ici $\det(A) = 42$ qu'il faut comprendre.

```
>>> import numpy as np
>>> a = np.random.randint(10, size=(3, 3))
>>> print(a)
[[8 3 3]
 [0 3 1]
 [1 9 5]]
>>> np.linalg.det(a)
41.999999999999986
```

Déterminants et matrices de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit e et ε deux bases de E, et soit P la matrice de passage de e à ε.
Alors on a l'égalité : $\det P = \det_e(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
Les applications « déterminant dans (e) » et « déterminant dans (ε) » sont reliées par : $\det_e = \det P \det_\varepsilon$.
Ce résultat rappelle l'égalité $[u]_e = P[u]_\varepsilon$ reliant les coordonnées dans e et ε d'un vecteur u de E.

Notation des déterminants

Soit $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant Δ de A est noté $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Plus généralement, c'est un tel « tableau » qu'on appellera déterminant d'ordre n (avec la signification qu'on lui a donné) sans qu'il soit nécessaire de préciser son « origine » (c'est-à-dire : matrice, famille de vecteurs, endomorphisme).

On ne confondra surtout pas Δ (une valeur numérique) avec la matrice $A = (a_{ij})$ elle-même.

Déterminants d'ordre 1, 2, ou 3

Pour tout scalaire a, on a bien sûr $|a| = a$ (ne pas confondre avec la valeur absolue...).

Pour tous scalaires a, b, c, d : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Pour tous $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, on a : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ac'b'' - ba'c''$.

Proposition 18.3.5 (déterminant du produit de deux matrices carrées)
Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Proposition 18.3.6 (déterminant d'une matrice carrée inversible)
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A est inversible si et seulement $\det(A) \neq 0$. *Dans ce cas :* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Conséquence : si les matrices carrées A et B sont semblables, alors elles ont le même déterminant.

Proposition 18.3.7 (déterminant des puissances d'une matrice carrée)
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit p un entier naturel. Alors $\det(A^p) = (\det A)^p$.
Ce résultat se généralise aux exposants négatifs si A est une matrice inversible.

Proposition 18.3.8 (déterminant de la tranposée d'une matrice carrée)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det(A^\top)$.

Conséquence importante : toutes les propriétés des déterminants qui s'expriment en termes de colonnes peuvent également s'exprimer en termes de lignes.

18.4 Calcul des déterminants

18.4.1 Déterminants et opérations élémentaires

Les propriétés des déterminants découlent ce qu'ils représentent des fonctions multilinéaires alternées de leurs colonnes (et aussi de leurs lignes).

Dans l'énoncé des propriétés suivantes (exprimées en termes de colonnes, mais qui pourraient l'être en termes de lignes), on note Δ un déterminant d'ordre n.

On convient de confondre « la valeur » Δ et « le tableau » Δ. Avec cette convention :

- La valeur d'un déterminant Δ dépend linéairement de chacune de ses colonnes (de ses lignes).
  Si on multiplie une colonne (une ligne) par λ, la valeur de Δ est multipliée par λ.
  En particulier, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et tout λ de $\mathbb{K}$, on a : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Si on échange deux colonnes (deux lignes) de Δ, la valeur de Δ est changée en son opposé.
  Plus généralement, si on effectue une permutation sur les colonnes (sur les lignes) de Δ, la valeur de Δ est inchangée (resp. changée en son opposé) selon que cette permutation est paire ou impaire, c'est-à-dire selon qu'elle se décompose en un nombre pair ou impair d'échanges.
- On ne modifie pas la valeur de Δ en ajoutant à l'une de ses colonnes (de ses lignes) une combinaison linéaire des autres colonnes (des autres lignes) de Δ.
- La valeur du déterminant Δ est nulle si et seulement si ses colonnes (ses lignes) sont liées.
  En particulier, si Δ contient une colonne (ou une ligne) nulle, alors la valeur de Δ est nulle.

On va résumer en termes d'opérations élémentaires sur les lignes (ou colonnes) :

Proposition 18.4.1 (effet d'une opération élémentaire sur un déterminant)
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et A' obtenue en appliquant à A une opération élémentaire φ.
Soit $\Delta = \det(A)$ et $\Delta' = \det(A')$.
- *si φ est l'opération $\mathrm{C}_i \leftarrow \alpha \mathrm{C}_i$ (ou $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \mathrm{L}_i$), avec $\alpha \neq 0$, alors $\Delta' = \alpha\Delta$.*
- *si φ est l'opération $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$ (ou $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$), alors $\Delta' = -\Delta$.*
- *si φ est l'opération $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i + \beta \mathrm{C}_j$ (ou $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \beta \mathrm{L}_j$), avec $j \neq i$, alors $\Delta' = \Delta$.*

18.4.2 Développement d'un déterminant, comatrice

Définition 18.4.1 (mineur, cofacteur, comatrice)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$, de terme général a_{ij}.
Pour tout couple d'indices (i, j), on appelle *mineur* de a_{ij} dans A (ou dans Δ), le déterminant Δ_{ij} d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant dans Δ la ligne et la colonne de a_{ij}.
La quantité $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est appelée *cofacteur* du coefficient a_{ij}.
On appelle *comatrice* de A et on note $\mathrm{com}(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général A_{ij}.

Exemple dans le cas $n = 3$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}, \text{ alors } \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Proposition 18.4.2 (développement d'un déterminant suivant une ligne)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$, de terme général a_{ij}.
Pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$, on a : $\Delta = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$.
Cette égalité est appelée développement de Δ suivant sa i-ème ligne.

Proposition 18.4.3 (développement d'un déterminant suivant une colonne)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$, de terme général a_{ij}.
Pour tout indice j de $\{1, \ldots, n\}$, on a : $\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$.
Cette égalité est appelée développement de Δ suivant sa j-ème colonne.

Proposition 18.4.4 (expression de l'inverse à l'aide de la comatrice)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$. Alors $A\operatorname{com}(A)^\top = \operatorname{com}(A)^\top A = (\det A)\, I_n$.
En particulier, si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\operatorname{com}(A)^\top$.

La formule précédente possède surtout un intérêt théorique.
Cas très particulier : si $n = 2$ et si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Voici une fonction `Python` pour calculer les cofacteurs et la comatrice (on suppose comme d'habitude que le module `numpy` a été préalablement importé) :

```
def cofacteur(a,i,j):
    return (-1)**(i+j)*np.linalg.det(np.delete(np.delete(a,j,1),i,0))
def comatrice(a):
    n, p = np.shape(a)
    return np.array([[cofacteur(a,i,j) for j in range(n)] for i in range(p)])
```

On forme ici une matrice aléatoire A d'ordre 5 (à coefficients entiers dans $[\![0, 9]\!]$).

```
>>> a = np.random.randint(10, size=(6, 6)); print(a)
[[6 7 3 3 1 2]
 [2 4 1 6 0 9]
 [6 9 0 6 0 2]
 [0 3 7 7 0 5]
 [7 8 0 1 6 1]
 [2 5 1 1 3 5]]
```

On forme ensuite sa comatrice B (il est prudent de rester en mode `float`, même si on sait que les coefficients de B, tout comme ceux de A, sont entiers) :

```
 b = comatrice(a); print(b)
[[ 6117. -1320.  3945. -4800. -4908.  1989.]
 [ 4697. -4916. -1649.  1733.   314.  2832.]
 [-4367.  4739. -2452.  1981. -1190. -2184.]
 [-2225.   104.  1868.  2557.  2275. -1464.]
 [ 2717. -3854. -1010.  3416.  5570. -1056.]
 [-7473.  8148.   705. -5232. -1515.  1449.]]
```

On calcule $A\,B^\top$, et on obtient une matrice scalaire (il faut arrondir raisonnablement le résultat, pour annuler les coefficients non diagonaux, qui sans cela refléteraient les erreurs d'arrondis) :

```
>>> print(np.dot(a,b.T).round(8))
array([[ 23967.,      0.,      0.,      0.,     -0.,     -0.],
       [    -0.,  23967.,     -0.,      0.,     -0.,     -0.],
       [    -0.,      0.,  23967.,      0.,     -0.,     -0.],
       [    -0.,      0.,     -0.,  23967.,     -0.,      0.],
       [    -0.,     -0.,      0.,      0.,  23967.,     -0.],
       [    -0.,      0.,     -0.,      0.,     -0.,  23967.]])
```

On vérifie enfin que le coefficient sur la diagonale de $A\,B^\top$ est le déterminant de A :

```
>>> np.linalg.det(a)
23967.000000000004
```

18.4.3 Quelques déterminants particuliers

Déterminants triangulaires

Proposition 18.4.5 (déterminants triangulaires)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, triangulaire (supérieure ou inférieure).
Alors $\det(A)$ est égal au produit $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ des coefficients diagonaux de A.

C'est le cas en particulier si la matrice est diagonale !

Proposition 18.4.6 (déterminants triangulaires par blocs)
Soit A une matrice carrée triangulaire (supérieure ou inférieure) « par blocs ».
Alors le déterminant de A est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

Par exemple : $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} a_{44} \begin{vmatrix} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$$

Déterminant de Vandermonde

Proposition 18.4.7 (déterminant de Vandermonde)
Soit $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n scalaires.
Soit A la matrice carrée d'ordre n, de terme général $a_{ij} = x_i^{j-1}$.
Le déterminant de A (et de sa transposée) est appelé « déterminant de Vandermonde » de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Sa valeur est $\det A = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

La matrice évoquée dans la définition précédente est $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$

Dans le module `numpy` de `Python`, on dispose d'une fonction `vander`.
Mais attention, l'indexation n'est pas conforme à notre défintion :

```
>>> a = np.vander([1,10,100]); print(a)
[[    1     1    1]
 [  100    10    1]
 [10000   100    1]]
>>> np.linalg.det(a)
-80190.000000000102
```

```
>>> a = np.vander(range(1,6)); print(a)
[[  1    1    1    1    1]
 [ 16    8    4    2    1]
 [ 81   27    9    3    1]
 [256   64   16    4    1]
 [625  125   25    5    1]]
```

Voici comment écrire notre propre fonction `vandermonde` :

```
>>> def vandermonde(x): # ici on attend une liste ou un intervalle
        import numpy as np
        n = len(x); x = np.array(x)
        return np.vstack([x**i for i in range(n)])
```

```
>>> a = vandermonde([1,10,100]); print(a)
[[    1     1     1]
 [    1    10   100]
 [    1   100 10000]]
>>> np.linalg.det(a)
80189.999999999971
```

```
>>> vandermonde(range(1,6))
array([[  1,   1,   1,   1,   1],
       [  1,   2,   4,   8,  16],
       [  1,   3,   9,  27,  81],
       [  1,   4,  16,  64, 256],
       [  1,   5,  25, 125, 625]])
```

18.5 Déterminants et orientation

18.5.1 Orientation d'un espace réel de dimension finie

Proposition 18.5.1 (orientation d'un espace réel de dimension finie)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $n \geqslant 1$.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Si $\det P > 0$, *on dit que la base $\mathcal{B}'$ a la* même orientation *que la base $\mathcal{B}$.*
On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.
Pour cette relation, il y a exactement deux classes d'équivalence.
Orienter E, c'est choisir l'une de ces deux classes.
– *les bases de la classe d'équivalence choisie sont dites* directes.
– *les bases de l'autre classe d'équivalence sont dites* indirectes.

Effet d'une permutation des vecteurs de base

Supposons que la base $\mathcal{B}'$ se déduise de $\mathcal{B}$ par une permutation σ sur les vecteurs de $\mathcal{B}$.
– si σ est une transposition, alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientation contraire.
– si σ est une permutation paire, les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation.
– si σ est une permutation impaire, alors elles sont d'orientation contraire.

Effet de l'opération $u \mapsto -u$ sur l'orientation d'une base

Si on passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ en changeant un vecteur en son opposé alors $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont d'orientation contraire.

Par exemple, si $\dim(E) = 2$, supposons que (u, v) soit une base directe de E.
– les bases $(-u, v)$, $(u, -v)$, (v, u) et $(-v, -u)$ sont indirectes.
– les bases (u, v), $(-u, -v)$, $(v, -u))$, et $(-v, u)$ sont directes.

De même, si $\dim(E) = 3$, supposons que (u, v, w) soit une base directe de E.
– les bases $(-u, v, w)$, $(u, -v, w)$, $(u, v, -w)$ et $(-u, -v, -w)$ sont indirectes.
– les bases (v, u, w), (w, v, u), (u, w, v) sont indirectes, etc.
– les bases (u, v, w), $(u, -v, -w)$, $(-u, v, -w)$, et $(-u, -v, w)$ sont directes.
– les bases (v, w, u), (w, u, v) sont directes, etc.

En résumé : il y a toujours *deux* orientations possibles sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Le choix de la classe des bases dites positives est arbitraire.

Néanmoins on orientera toujours $\mathbb{R}^n$ en décrétant que sa base canonique est directe.

18.5.2 Si $n = 2$, le déterminant est une aire orientée

On se place ici dans $\mathbb{R}^2$, muni de son orientation canonique.

Définition 18.5.1 (parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$)
Soit u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On appelle *parallélogramme* formé sur u, v l'ensemble des vecteurs $\alpha u + \beta v$, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Si on note $\mathcal{P}_{u,v}$ l'ensemble précédent, on a bien sûr $\mathcal{P}_{u,v} = \mathcal{P}_{v,u}$.
On pourra appeler « parallélogramme unité » le parallélogramme formé sur les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ de la base canonique, c'est-à-dire les couples (α, β), avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Définition 18.5.2 (aire orientée d'un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$)
On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique e, et de son orientation canonique (la base e est directe).
Soit u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et soit $\mathcal{P}_{u,v}$ le parallélogramme formé sur u et v.
La quantité $\det_e(u, v)$ est appelée « aire orientée » du parallélogramme $\mathcal{P}_{u,v}$.

Avec cette définition, l'aire du « parallélogramme unité » est égale à 1.

L'aire orientée du parallélogramme $\mathcal{P}_{v,u}$ est l'opposée de celle du parallélogramme $\mathcal{P}_{u,v}$.

L'aire orientée de $\mathcal{P}_{u,v}$ est nulle si et seulement si u et v sont liés (« parallélogramme plat »).

Lien avec l'aire au sens usuel

On suppose ici que les vecteurs u et v sont libres (donc forment une base du plan $\mathbb{R}^2$).

Dans ces conditions, $\det_e(u, v)$ est strictement positif si la base (u, v) est directe, strictement négatif sinon. Le signe de l'aire orientée du parallélogramme $\mathcal{P}_{u,v}$ reflète donc l'orientation de la base u, v.

Supposons par exemple que la base u, v est directe.

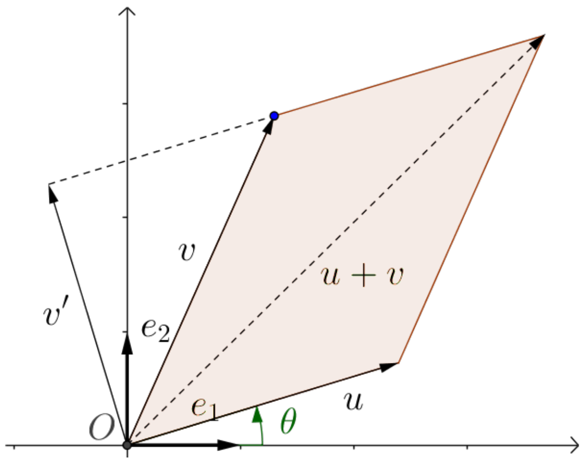
Soit v' la projection de v sur la droite orthogonale à u.

Soit $\varepsilon_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\varepsilon_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$ les vecteurs unitaires normalisés respectifs de u et v'.

Avec ces notations, on a :

$$\begin{aligned}\det_e(u, v) &= \|u\|\,\|v'\|\det_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\\ &= \|u\|\,\|v'\|\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix} = \|u\|\,\|v'\|\end{aligned}$$

Enfin, la quantité $\|u\|\,\|v'\|$ est bien l'aire, au sens usuel, du parallélogramme formé sur u et v (le produit de la « base » $\|u\|$, par la « hauteur » $\|v'\|$).



18.5.3 Si $n = 3$, le déterminant est un volume orienté

Définition 18.5.3 (parallélépipède dans $\mathbb{R}^3$)
Soit u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On appelle *parallélépipède* formé sur u, v, w l'ensemble des vecteurs $\alpha u + \beta v + \delta w$, avec $\begin{cases} 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \delta \leqslant 1 \end{cases}$

Si on note $\mathcal{P}_{u,v,w}$ l'ensemble précédent, on a bien sûr $\mathcal{P}_{u,v,w} = \mathcal{P}_{v,u,w} = \mathcal{P}_{w,u,v} = \ldots$

On pourra appeler « parallélépipède unité » le parallélépipède formé sur les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ de la base canonique, c'est-à-dire les couples (α, β, δ), avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et $0 \leqslant \delta \leqslant 1$.

Définition 18.5.4 (volume orienté d'un parallélépipède dans $\mathbb{R}^3$)
On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique e, et de son orientation canonique (la base e est directe).

Soit u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et soit $\mathcal{P}_{u,v,w}$ le parallélépipède formé sur u, v, w.

La quantité $\det_e(u, v, w)$ est appelée « volume orienté » du parallélépipède $\mathcal{P}_{u,v,w}$.

Avec cette définition, le volume du « parallélépipède unité » est égal à 1.

Si on échange deux vecteurs dans la famille u, v, w, le volume orienté est changé en son opposé.

Le volume orienté de $\mathcal{P}_{u,v,w}$ est nulle si et seulement si u, v, w sont liés (« parallélépipède plat »).

Lien avec le volume au sens usuel

On suppose ici que les vecteurs u, v, w sont libres (donc forment une base de $\mathbb{R}^3$).

Alors $\det_e(u, v, w)$ est strictement positif si la base (u, v, w) est directe, strictement négatif sinon.

Le signe du volume orienté du parallélépipède $\mathcal{P}_{u,v,w}$ reflète donc l'orientation de la base u, v, w.

Supposons pour fixer les idées, que la base u, v, w est directe.

Dans le plan $\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$, soit v' la projection de v sur la droite vectorielle orthogonale à u.

Soit w' la projection de w sur la droite orthogonale au plan $\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v'$ (faire un dessin).

Soit ε_1, ε_2 et ε_3 les vecteurs unitaires normalisés respectifs de u, v', w'.

La base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ est orthonormale directe, donc $\det_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 1$.

Alors $\det_e(u, v, w) = \det_e(u, v, w') = \det_e(u, v', w') = \|u\|\,\|v'\|\,\|w'\| \det_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \|u\|\,\|v'\|\,\|w'\|$.

Enfin, $\|u\|\,\|v'\|\,\|w'\|$ est bien le volume, au sens usuel, du parallélépipède formé sur les vecteurs u, v, w (c'est-à-dire le produit de l'aire de la « base » $\|u\|\,\|v'\|$ par la « hauteur » $\|w'\|$).