Chapitre 19

Espaces préhilbertiens réels

Sommaire

19.1 Produit scalaire, norme et distance

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

19.1.1 Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

Définition 19.1.1 (produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.
On dit que $f: E \times E \to \mathbb{R}$ est un *produit scalaire* sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :
– l'application f est *bilinéaire*.
– pour tous vecteurs u et v de E, on a $f(u, v) = f(v, u)$ (on dit que f est *symétrique*).
– pour tout vecteur u de E, on a : $f(u, u) \geqslant 0$ (on dit que f est *positive*).
– pour tout vecteur u de E, on a : $f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$ (on dit que f est *définie*).

Rappelons que la bilinéarité s'écrit : $\begin{cases} \forall\,(u, u', v, v') \in E^4 \\ \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$ $\begin{cases} f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v) \\ f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v') \end{cases}$

Si le caractère symétrique de f est établi, la « linéarité à droite » équivaut à la « linéarité à gauche ».
Un produit scalaire sur E est donc une « forme bilinéaire symétrique définie positive ».

Définition 19.1.2 (espace préhilbertien réel, espace euclidien)
Un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien réel*.
Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Notations

Plutôt que de noter $f(u, v)$, on note souvent $< u, v >$, ou $u \cdot v$, ou $(u \mid v)$.
Avec la notation $(\cdot \mid \cdot)$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient :

$$\forall\,(u, u', v, v') \in E^4,\ \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \quad \begin{cases} (\alpha u + \beta u' \mid v) = \alpha\,(u \mid v) + \beta\,(u' \mid v) \\ (u \mid \alpha v + \beta v') = \alpha\,(u \mid v) + \beta\,(u \mid v') \\ (u \mid v) = (v \mid u) \qquad (u \mid u) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (u \mid u) = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Proposition 19.1.1 (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)
Soit $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$.
En posant $(u \mid v) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
On l'appelle le produit scalaire canonique *de $\mathbb{R}^n$.*

Notation matricielle :
Si on note $[u]$ la matrice-colonne associée à tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, alors $(u \mid v) = [u]^\top [v]$.

Proposition 19.1.2 (un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$)
Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$.
En posant $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$, on définit un produit scalaire sur E.

19.1.2 Norme et distance associée

Proposition 19.1.3 (norme et distance associée à un produit scalaire)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour tout vecteur u de E, on appelle norme de u *la quantité* $\|u\| = \sqrt{(u \mid u)}$.
Pour tous vecteurs u, v on appelle distance de u à v *la quantité* $d(u, v) = \|u - v\|$.
Les applications « norme » et « distance » sont dites associées au produit scalaire sur E.

Définition 19.1.3 (vecteurs unitaires)
Soit E un espace préhilbertien réel. Un vecteur u de E est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.

Proposition 19.1.4 (inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour tous vecteurs u, v de E, on a l'inégalite dite « de Cauchy-Schwarz » : $|(u \mid v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$.
Il y a égalité dans ce résultat si et seulement si u et v sont liés.

Les deux exemples classiques

– On se place dans $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique.
  Pour tout vecteur $u = (x_1, \ldots, x_n)$, on a $\|u\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2}$.
  Pour tous $\begin{cases} u = (x_1, \ldots, x_n) \\ v = (y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2$

– On se place dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de $(f \mid g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Alors $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t}$.
  Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $\Big(\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\Big)^2 \leqslant \int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t \int_a^b g(t)^2\, \mathrm{d}t$

Proposition 19.1.5 (propriétés de la norme associée à un produit scalaire)
Soit E un espace préhilbertien réel.
– *pour tout vecteur u de E, on a l'inégalité $\|u\| \geqslant 0$, et l'équivalence $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$.*
– *pour tout vecteur u de E, et pour tout réel λ, on a : $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$.*
– *pour tous vecteurs u, v de E, on a l'*inégalité triangulaire *: $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.*
  cette inégalité est une égalité si et seulement si u et v sont « positivement liés ».

Remarques

– l'expression « positivement liés » signifie l'existence de λ dans $\mathbb{R}^+$ tel que $v = \lambda u$ ou $u = \lambda v$.
– pour tous vecteurs u et v de E, on a l'encadrement : $\big| \|u\| - \|v\| \big| \leqslant \|u \pm v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.
– Si u est non nul, les vecteurs $\pm \dfrac{u}{\|u\|}$ sont les seuls vecteurs unitaires de la droite $\mathbb{R}u$.

Proposition 19.1.6 (propriétés de la distance associée à un produit scalaire)
Soit E un espace préhilbertien réel. On note $d(u,v)$ la distance associée.
– *pour tous vecteurs u et v de E, on a $d(u,v) = d(v,u)$.*
– *pour tous vecteurs u et v de E, on a l'inégalité $d(u,v) \geqslant 0$, et l'équivalence $\Big(d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v\Big)$.*
– *pour tous vecteurs u,v,w, on a $d(u,v) = d(u+w, v+w)$ (la distance est* invariante par translation*).*
– *pour tous vecteurs u,v,w de E, on a l'*inégalité triangulaire *: $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v)$;*
il y a égalité dans ce résultat si et seulement si il existe λ dans $[0,1]$ tel que $w = \lambda u + (1-\lambda)v$.

Remarques

La notion de distance est surtout utilisée dans le cadre de la géométrie affine.
On parle alors de la distance $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ entre deux points A et B.
Avec ces notations, $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$ (égalité si et seulement si C est sur le segment $[A;B]$)

Proposition 19.1.7 (un développement usuel)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour tous u,v de E, et tous réels α,β on a : $\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta\,(u \mid v) + \beta^2 \|v\|^2$.

En particulier, $\begin{cases} \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u \mid v) + \|v\|^2 \\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\,(u \mid v) + \|v\|^2 \end{cases}$
Par addition, on en déduit : $\forall\,(u,v) \in E^2,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\Big(\|u\|^2 + \|v\|^2\Big)$.
Cette égalité est connue sous le nom d'*identité du parallélogramme*.

Proposition 19.1.8 (formule de polarisation)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour tous vecteurs u,v de E, on a : $(u \mid v) = \dfrac{1}{2}\Big(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\Big)$.

19.2 Orthogonalité

19.2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 19.2.1 (orthogonalité de deux vecteurs)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Deux vecteurs u et v de E sont dits *orthogonaux* s'ils vérifient $(u \mid v) = 0$.

Remarques

– ces notions dépendent évidemment du produit scalaire utilisé sur E. si on en change, les vecteurs qui étaient orthogonaux ne le sont donc plus nécessairement.
– la définition de l'orthogonalité est symétrique car $(u \mid v) = (v \mid u)$.
– le seul vecteur u qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
a fortiori, le seul vecteur u qui est orthogonal à tous les vecteurs de E est $u = \overrightarrow{0}$.

Définition 19.2.2 (familles orthogonales ou orthonormales)
Soit E un espace préhilbertien réel.
On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* si les u_i sont orthogonaux deux à deux.
Si de plus ils sont unitaires, alors la famille est dite *orthonormale* (ou orthonormée).

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthonormale $\Leftrightarrow \forall\,(i,j)\in I^2,\ (u_i \mid u_j)=\delta_{ij}$ (notations de Kronecker).

Deux exemples classiques

– La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique.
– On se place dans $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f \mid g)=\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.
  La famille des $f_n : x\mapsto \cos(nx)$, avec n dans $\mathbb{N}$, est orthogonale pour ce produit scalaire.

Proposition 19.2.1 (une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Si une famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, alors c'est une famille libre.

C'est le cas notamment d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ orthonormale.
En particulier, si $\dim E = n \geqslant 1$, une famille orthonormale de n vecteurs est une base orthonormale.

Proposition 19.2.2 (théorème de Pythagore)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Si la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est orthogonale, alors $\Big\|\displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k\Big\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\|u_k\|^2$ *(relation de Pythagore).*
Attention, la réciproque n'est vraie que si $p=2$.
Ainsi : $(u \mid v)=0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

19.2.2 Orthogonal d'une partie

Définition 19.2.3 (orthogonal d'une partie d'un espace préhilbertien)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit X une partie non vide de E.
L'*orthogonal de X*, noté $X^\perp$, est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à *tous* les éléments de X.

Définition 19.2.4
Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit X, Y deux parties non vides de E.
On dit que les parties X et Y sont orthogonales si : $\forall\,u\in X,\ \forall\,v\in Y,\ (u \mid v)=0$.
Cela équivaut à l'inclusion $Y\subset X^\perp$ (ou bien sûr à l'inclusion $X\subset Y^\perp$).

Propriétés

– De manière évidente, on a $\{\overrightarrow{0}\}^{\perp} = E$, et $E^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$. Si $X \subset Y$, alors $Y^{\perp} \subset X^{\perp}$.

– L'orthogonal $X^{\perp}$ de X est *toujours* un sous-espace vectoriel de E, même si X n'en est pas un.

– Si X est une partie non vide de E, alors $X^{\perp} = \text{Vect}(X)^{\perp}$.
En particulier, si $X = \text{Vect}\{u_j,\ j \in J\}$, alors : $v \in X^{\perp} \Leftrightarrow \forall j \in J,\ (v \mid u_j) = 0$.

– Pour toute partie non vide de E, on a l'inclusion $X \subset X^{\perp\perp}$ (X est inclus dans son *double orthogonal*).
Cette inclusion peut être stricte, notamment si X n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique (et en notant e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique) : si $X = \{e_1, e_2\}$, alors $X^{\perp} = \mathbb{R}e_3$, puis $X^{\perp\perp} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$.

– Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \cap F^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$: la somme $F + F^{\perp}$ est donc directe.
La proposition suivante généralise ce résultat :

Proposition 19.2.3 (sommes directes orthogonales)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit $(F_j)_{j \in J}$ une famille de sous-espaces de E, orthogonaux deux à deux.
Alors la somme $G = \sum F_j$ est directe, et on notera $G = \overset{\perp}{\oplus} F_j$ (on parle de somme directe orthogonale*).*

19.2.3 Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

Proposition 19.2.4 (principe de l'algorithme)
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille libre de E.
Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, on pose $\varepsilon_k = \dfrac{1}{\|u_k\|}\, u_k$, où $u_k = e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j \mid e_k)\, \varepsilon_j$

La première étape de l'algorithme consiste bien sûr à poser $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|}\, e_1$

Proposition 19.2.5 (preuve de l'algorithme)
Avec les notations précédentes, l'algorithme de Schmidt se termine.
Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, on a $\text{Vect}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} = \text{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\}$, et $(\varepsilon_k \mid e_k) > 0$.
La famille $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ ainsi construite est donc une famille orthonormée.

Illustration du procédé

On illustre le passage d'une famille libre $e = (e_1, e_2, e_3)$ à une famille orthonormale $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

On a conservé les notations de la proposition en ce qui concerne les vecteurs u_2 et u_3.

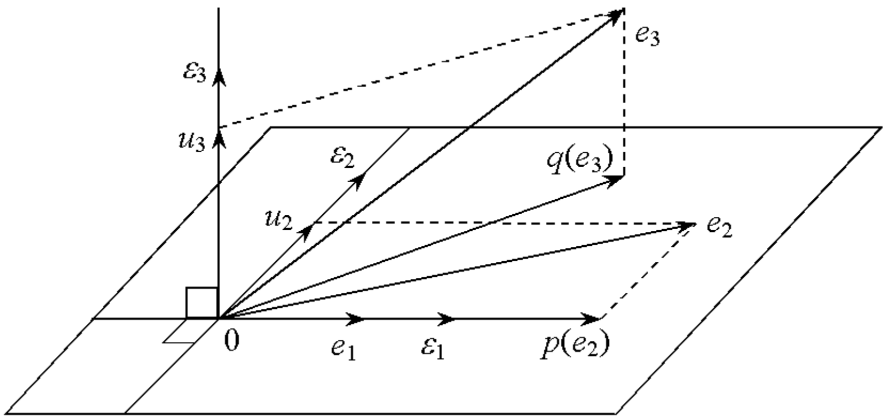
On a cependant noté $p(e_2) = (\varepsilon_1 \mid e_2)\, \varepsilon_1$, donc $u_2 = e_2 - p(e_2)$.

De même, on a noté $q(e_3) = (\varepsilon_1 \mid e_3)\, \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 \mid e_3)\, \varepsilon_2$, donc $u_3 = e_3 - q(e_3)$.

On voit bien, ce qui sera repris plus tard, que :

– le vecteur $p(e_2)$ est la « projection orthogonale » de e_2 sur la droite engendrée par ε_1 (donc par e_1)

– le vecteur $q(e_3)$ est la projection orthogonale de e_3 sur le plan engendré par $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (donc par e_1, e_2)



Si on se place dans un espace E de dimension finie, le résultat ci-dessous découle immédiatement de l'algorithme d'orthonormalisation appliqué à une base quelconque e de E.

Proposition 19.2.6 (existence de bases orthonormales dans un espace euclidien)
Soit E un espace euclidien (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie).
Alors, dans l'espace vectoriel E, il existe des bases orthonormales.

Proposition 19.2.7 (théorème de la base orthonormée incomplète)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ une famille orthonormée de E, avec $p < n$ (donc non génératrice).
Alors il est possible de compléter ε en une base orthonormée $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ de E.

19.2.4 Calculs dans une base orthonormale

Proposition 19.2.8 (expressions des coordonnées dans une base orthonormale)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et soit $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base orthonormale de E.
Pour tout vecteur u de E, on a : $u = \sum_{k=1}^{n} (u \mid \varepsilon_k)\, \varepsilon_k$.

Tout vecteur u de E est donc entièrement déterminé par ses produits scalaires sur les vecteurs de ε.

Les *applications coordonnées* dans la base ε sont les applications $u \mapsto (u \mid \varepsilon_k)$.

Proposition 19.2.9 (expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et soit $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base orthonormale de E.
Pour tous vecteurs $x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \varepsilon_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, \varepsilon_k$, on a : $(x \mid y) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$ et $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Expression matricielle du produit scalaire dans une base orthonormale

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base orthonormale de E.

On peut écrire $(x \mid y) = X^\top Y$, en notant X, Y les matrices-colonne des coordonnées de x, y dans ε.

Expression matricielle du produit scalaire dans une base quelconque

Si la base ε de E est *quelconque*, alors on a seulement $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\, y_k\,(\varepsilon_j \mid \varepsilon_k)$.

On peut alors écrire : $(x \mid y) = X^\top G Y$, où G est la matrice des $(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j)$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base orthonormale

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthormée de E, et soit $v = (v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E.

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de la famille v dans la base ε. Alors $a_{i,j} = (\varepsilon_i \mid v_j)$ pour tous i, j.

Si on note ε la base orthonormée obtenue à partir d'une base quelconque e de E par l'algorithme de Schmidt, alors les matrices de passage $P_{e,\varepsilon}$ (de e à ε) et $P_{\varepsilon,e}$ (de ε à e, inverse de la matrice précédente) sont triangulaires supérieures avec coefficients diagonaux strictement positifs.

19.3 Produit mixte, produit vectoriel

19.3.1 Produit mixte dans un espace euclidien orienté

Dans cette section on se place dans un espace vectoriel euclidien orienté E.
Il y a dans E des bases orthonormales directes et des bases orthonormales indirectes. En effet, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2 \dots, e_n)$ est orthonormale, $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormale d'orientation contraire.

Proposition 19.3.1 (produit mixte)
Soit $u_1, \dots, u_n$ une famille de n vecteurs d'un espace euclidien orienté E de dimension n.
Le déterminant $\det_e(u_1, u_2, \dots, u_n)$ *est le même dans toute base orthonormale directe e.*
Ce déterminant est appelé produit mixte *de $u_1, u_2, \dots, u_n$ et il est noté $[u_1, u_2, \dots, u_n]$.*

Produit mixte et orientation

L'application « produit mixte » est une forme n-linéaire alternée sur E.

Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ forment une base orthonormale directe, alors $[e_1, e_2, \dots, e_n] = 1$.

Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ forment une base orthonormale indirecte, alors $[e_1, e_2, \dots, e_n] = -1$.

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ une famille de n vecteurs de E.
On a évidemment $[u_1, u_2, \dots, u_n] \neq 0$ si et seulement si les u_k forment une base de E.
Si la base $u_1, u_2, \dots, u_n$ est directe (resp. indirecte) alors $[u_1, u_2, \dots, u_n] > 0$ (resp. < 0)

Produit mixte et produit scalaire

Soit u, v deux vecteurs d'un plan euclidien orienté E. Alors $(u \mid v)^2 + [u, v]^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2$.

Dans E euclidien orienté de dimension n, on a : $\Big|[u_1, u_2, \dots, u_n]\Big| \leqslant \|u_1\|\,\|u_2\|\,\cdots\,\|u_n\|$.

Si les u_k sont libres, ce résultat est une égalité si et seulement les u_k sont orthogonaux deux à deux.

Produit mixte et applications linéaires

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ une famille de n vecteurs de l'espace euclidien orienté E.

Pour tout endomorphisme f de E, on a : $[f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)] = (\det f)[u_1, u_2, \ldots, u_n]$.

En particulier, si $\det(f) = 1$, on a $[f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)] = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$.

On peut donc dire que les applications linéaires de déterminant 1 *conservent le produit mixte.*

Interprétation du produit mixte dans un plan orienté

Soit u, v deux vecteurs d'un plan euclidien orienté E_2.

Alors $[u, v]$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v.

L'aire orientée du triangle formé sur u et v est $\dfrac{1}{2}[u, v]$.

Interprétation du produit mixte en dimension 3

On se place dans un espace euclidien orienté E_3 de dimension 3.

On identifie ici les éléments de E_3 avec des points de l'espace.

On se donne un parallélépipède dont les arêtes issues de A sont AB, AC, et AD.

Son volume orienté est $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$. Celui du tétraèdre $ABCD$ est $\dfrac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

On a représenté ci-dessous le parallélépipède.

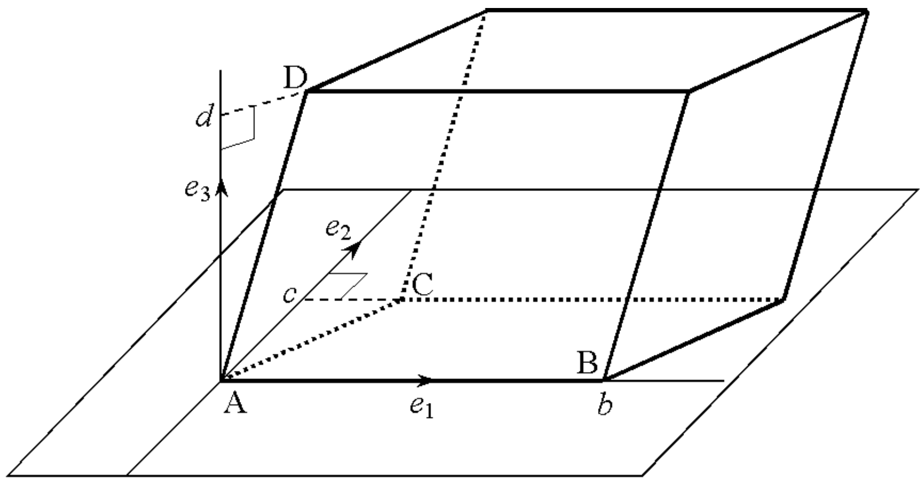
Ici la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ est directe, donc le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$ est positif.

Le procédé de Schmidt transforme $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ en une base orthonormale directe e_1, e_2, e_3.

On peut alors écrire $\overrightarrow{AB} = be_1$, $\overrightarrow{AC} = c'e_1 + ce_2$, $\overrightarrow{AD} = d''e_1 + d'e_2 + de_3$.

Alors $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \det_e\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = bcd$: c'est bien le volume du parallélépipède.

En effet, bc est l'aire du parallélogramme de base, et d est la hauteur du parallélépipède.



19.3.2 Produit vectoriel

Proposition 19.3.2 (produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3)
Soit u, v deux vecteurs d'un espace euclidien orienté E de dimension 3.
Il existe un unique vecteur a de E tel que : $\forall\, w \in E,\ [u, v, w] = (a \mid w)$.
Ce vecteur a est appelé produit vectoriel *de u par v, et il est noté $u \wedge v$.*
On a donc l'égalité, pour tous vecteurs u, v, w de E : $[u, v, w] = ((u \wedge v) \mid w)$.

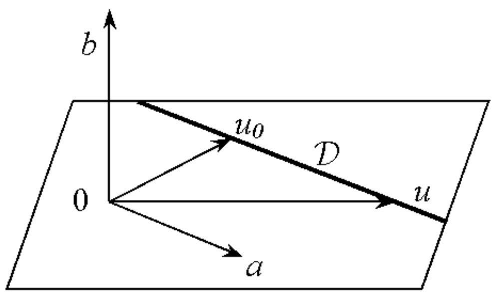
Remarques et propriétés

– Alors que le produit mixte existe en dimension n, le produit vectoriel n'existe qu'en dimension 3.
– L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée : $\forall\,(u, v) \in E^2,\ u \wedge v = -v \wedge u$.
Pour tous vecteurs u, v, w, on peut écrire : $[u, v, w] = ((u \wedge v) \mid w) = (u \mid (v \wedge w))$.
– Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.
On a : $u \wedge v = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u, v$ sont liés. Si u, v sont libres, alors $u, v, u \wedge v$ forment une base directe.
– Si u, v sont unitaires et orthogonaux, alors u, v, w est une base orthonormale directe.
Si i, j, k est orthonormale directe on a : $\begin{cases} i \wedge j = k & j \wedge k = i & k \wedge i = j \\ j \wedge i = -k & k \wedge j = -i & i \wedge k = -j \end{cases}$
– On suppose que E est muni d'une base orthonormale directe i, j, k.
Soit $u = xi + yj + zk$ et $v = x'i + y'j + z'k$.
Alors le produit vectoriel $u \wedge v$ se calcule en écrivant : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$.
– Soit u, v deux vecteurs de E.
On a l'égalité : $(u \mid v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\ \|v\|^2$.
En particulier $\|u \wedge v\| \leqslant \|u\|\ \|v\|$, avec égalité si et seulement si $(u \mid v) = 0$.
– L'aire du parallélogramme $ABDC$ est $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, celle du triangle ABC est $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.
– *Distance d'un point à une droite*
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant Ω et dirigée par u. La distance de M à $\mathcal{D}$ est $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega M} \wedge u\right\|}{\|u\|}$.

Proposition 19.3.3 (formule du double produit vectoriel)
Pour tous vecteurs u, v, w, on a : $u \wedge (v \wedge w) = (u \mid w)\, v - (u \mid v)\, w$.

Proposition 19.3.4 (problème de la division vectorielle)
Soit a, b dans E, avec a non nul ; on cherche les vecteurs u de E tels que $a \wedge u = b$.
Si $(a \mid b) \neq 0$, il n'y a pas de solution, sinon on obtient les $u = u_0 + \lambda a$, avec $u_0 = \dfrac{1}{\|a\|^2}\, b \wedge a$.

On illustre ici le problème de la division vectorielle.
On voit deux vecteurs a et b qui sont orthogonaux.
On cherche les vecteurs u tels que $a \wedge u = b$.
Les solutions u sont forcément orthogonales à b.
Le vecteur u_0 est la seule solution qui soit orthogonale à a.
Les autres solutions forment la droite affine $\mathcal{D}$ passant par u_0 et dirigée par a.



19.4 Projections orthogonales

19.4.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 19.4.1 (supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie)
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Alors $E = F \oplus F^{\perp}$. Le sous-espace $F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal *de F.*

Le cadre du résultat précédent est : F sous-espace de dimension finie de E (qui lui est de dimension quelconque). Évidemment, il n'y a pas d'hypothèse à faire sur F si E est lui-même de dimension finie.

Proposition 19.4.2 (dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie)
Soit E un espace euclidien, donc de dimension finie n.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$.
On a l'égalité $F = F^{\perp\perp}$. Ainsi F est lui-même le supplémentaire orthogonal de $F^{\perp}$.

Si on est en dimension finie, on pourra donc dire des sous-espaces F et $F^{\perp}$ qu'ils sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.

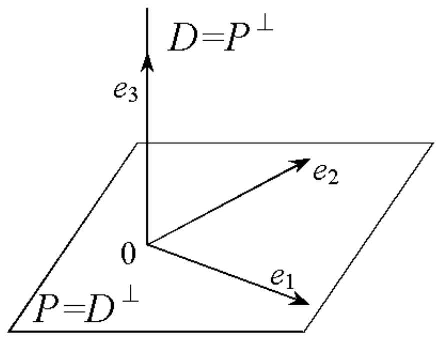
Supplémentaire orthogonal et bases orthonormées

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien E.

Si e est une base orthonormale de F et si e' est une base orthonormale de $F^{\perp}$, alors $e \cup e'$ (obtenue par juxtaposition) est une base orthonormale de E.

Réciproquement, si on complète une base orthonormale $e_1, \ldots, e_p$ de F en une base orthonormale $e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n$ de E, alors $e_{p+1}, \ldots, e_n$ est une base orthonormale de $F^{\perp}$.

Plaçons nous dans un espace euclidien E de dimension 3.
Ici, le plan vectoriel P et la droite vectorielle D sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.
Si (e_1, e_2) est une base de P et si e_3 est une base de D, alors la famille (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de E si et seulement si (e_1, e_2) est une base orthonormale de P et e_3 est unitaire.



19.4.2 Projection orthogonale

Proposition 19.4.3 (projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie)
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
La projection p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée projection orthogonale *sur F.*

Soit $\varepsilon = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ une base orthonormale de F.
Alors pour tout vecteur u de E, on a l'égalité : $p_F(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (u \mid \varepsilon_k)\, \varepsilon_k$.

Si p est la projection orthogonale sur F, alors $\mathrm{Id} - p$ est la projection orthogonale sur $F^\perp$.

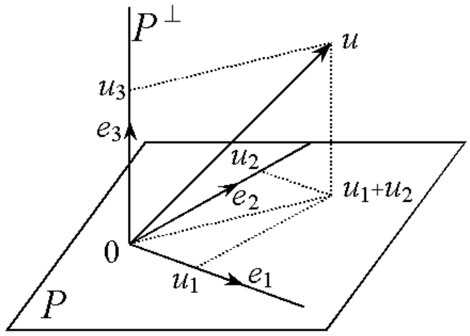
Projection orthogonale sur une droite ou un hyperplan

Soit a un vecteur non nul de l'espace préhilbertien réel E.
La projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}a$ est définie par $p_a(u) = \dfrac{(a \mid u)}{\|a\|^2}\, a$.
Bien sûr, si a est unitaire : $p_a(u) = (a \mid u)\, a$.

On suppose E de dimension finie, et on considère l'hyperplan $H = (\mathbb{R}a)^\perp$.
La projection orthogonale sur $H = (\mathbb{R}a)^\perp$ est définie par $p_H : u \mapsto p_H(u) = u - \dfrac{(a \mid u)}{\|a\|^2}\, a$.

Illustration en dimension 3

On suppose ici $\dim E = 3$.
Soit e_1, e_2 une base orthonormale du plan P.
Soit e_3 un vecteur unitaire de la droite $P^\perp$.
On s'est donné un vecteur u de E.
Chaque $u_k = (u \mid e_k)\, e_k$ est la projection orthogonale de u sur la droite engendrée par e_k.
Le vecteur $u_1 + u_2 = (u \mid e_1)\, e_1 + (u \mid e_2)\, e_2$ est la projection orthogonale de u sur le plan P.



Retour au procédé de Schmidt

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $e = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille libre de E.
Le procédé de Schmidt transforme la famille e en une famille orthonormale $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$.
La formation du vecteur ε_k peut être interprétée de la manière suivante :

– Soit $F_{k-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1})$.
  La projection orthogonale v_k de e_k sur F_{k-1} est donnée par $v_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} (e_k \mid \varepsilon_j)\, \varepsilon_j$.
– On en déduit $u_k = e_k - v_k$, orthogonal à F_{k-1} et non nul.
  Il suffit alors de normer le vecteur u_k pour obtenir le vecteur ε_k.

Proposition 19.4.4 (caractérisations des projections orthogonales)
Soit p une projection vectorielle de l'espace euclidien E.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
– *la projection p est une projection orthogonale.*
– *pour tous vecteurs u, v de E, on a l'égalité $(p(u) \mid v) = (u \mid p(v))$.*
– *la matrice de p dans* toute *base orthonormale est symétrique.*
– *la matrice de p dans* une *base orthonormale est symétrique.*

Proposition 19.4.5 (une autre caractérisation des projections orthogonales)
Soit p une projection vectorielle de l'espace euclidien E.
L'application p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall\, u \in E,\ \|p(u)\| \leqslant \|u\|$.

19.4.3 Distance à un sous-espace

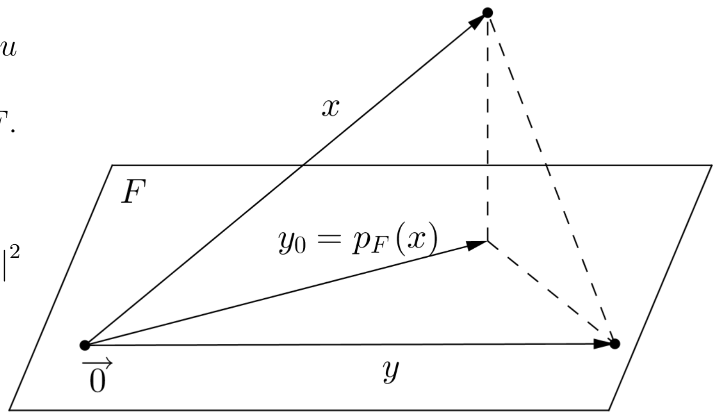
Définition 19.4.1 (distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel)
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Pour tout vecteur u de E, on appelle distance de u à F la quantité $d(u, F) = \inf\{\|u - w\|, w \in F\}$.

Proposition 19.4.6 (caractérisation du projeté orthogonal)
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit p la projection orthogonale de E sur F.
Alors $p(u)$ vérifie $\|u - p(u)\| = d(u, F)$, et il est le seul dans F à posséder cette propriété.

Interprétation
Parmi tous les vecteurs de F, le projeté orthogonal de u est celui qui est « le plus proche » de u.
On illustre ici la projection orthogonale $p(u)$ de u sur F.
Pour tout vecteur w de F, on a :

$$\begin{aligned} \|u-w\|^2 &= \|u-p(u)+p(u)-w\|^2 \\ &= \|u-p(u)\|^2 + \|p(u)-w\|^2 \geqslant \|u-p(u)\|^2 \end{aligned}$$

(avec égalité si et seulement si $w = p(u)$).
De plus : $d(u, F)^2 = \|u - p(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2$.



19.5 Hyperplans affines d'un espace euclidien

19.5.1 Vecteur normal à un hyperplan d'un espace euclidien

Définition 19.5.1 (vecteur normal à un hyperplan affine)
Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E, de direction un hyperplan vectoriel H.
On appelle vecteur normal à $\mathcal{H}$ tout vecteur non nul de la droite vectorielle $D = H^\perp$.

Proposition 19.5.1 (caractérisation d'un hyperplan par un point et un vecteur normal)
Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$.
Soit A un point de $\mathcal{H}$. Alors on a l'équivalence : $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n}\right) = 0$.

Un hyperplan affine $\mathcal{H}$ est donc déterminé par la donnée d'un point Ω et d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Proposition 19.5.2 (lignes de niveau de $M \mapsto \left(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n}\right)$)
Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul d'un espace euclidien E. Soit A un point quelconque de E.
On considère l'application f définie sur E par $f(M) = \left(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n}\right)$.
On appelle lignes de niveau *de f les ensembles $\mathcal{H}_\lambda = \{M \in E,\ f(M) = \lambda\}$.*
Les lignes de niveau de f sont les hyperplans affines de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
En particulier $\mathcal{H}_0$ est l'hyperplan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et qui passe par A.

19.5.2 Équations d'un hyperplan dans une base orthonormale

Proposition 19.5.3 (normale et équations d'un hyperplan affine)
Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée e.
Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, de direction H, et soit $\overrightarrow{n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ un vecteur non nul de E.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
- *le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à l'hyperplan vectoriel H (à l'hyperplan affine $\mathcal{H}$).*
- *une équation de H est $(a \mid u) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$.*
- *une équation de $\mathcal{H}$ est $(a \mid u) = \lambda$, avec λ réel, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \lambda$.*

Exemples dans $\mathbb{R}^2$

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, avec son produit scalaire canonique.

- La normale à la droite vectorielle d'équation $2x + 5y = 0$ est dirigée par $\overrightarrow{n} = (2, 5)$.
  Soit $\mathcal{D}$ la droite affine orthogonale au vecteur $\overrightarrow{n} = (2, 5)$ et passant par $\Omega(4, 1)$.
  La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $2(x - 4) + 5(y - 1) = 0$, donc $2x + 5y = 13$.
- Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines de $\mathbb{R}^2$, de directions respectives D et D'.
  On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont *perpendiculaires* si $D^\perp = D'$, c'est-à-dire si la direction de chaque droite affine est le supplémentaire orthogonal de la direction de l'autre.
  Cela équivaut aussi à dire que les vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonaux.
  Supposons que les équations de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient $\begin{cases} ax + by = \lambda \\ a'x + b'y = \mu \end{cases}$
  Alors les droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Exemples dans $\mathbb{R}^3$

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, avec son produit scalaire canonique.

- La normale au plan vectoriel d'équation $2x + 5y - 3z = 0$ est dirigée par $\overrightarrow{n} = (2, 5, -3)$.
  Soit $\mathcal{P}$ le plan affine orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n} = (1, 3, -2)$ et passant par $\Omega(4, -5, -7)$.
  Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $(x - 4) + 3(y + 5) - 2(z + 7) = 0$, donc $x + 3y - 2z = 3$.
- Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans affines de $\mathbb{R}^3$, de directions P et P'.
  On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont *perpendiculaires* si $P^\perp \subset P'$, c'est-à-dire si $(P')^\perp \subset P$.
  Cela signifie que la direction de chacun des deux plans contient un vecteur normal à l'autre.
  Cela équivaut aussi à dire que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
  Supposons que les équations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ soient $\begin{cases} ax + by + cz = \lambda \\ a'x + b'y + c'z = \lambda' \end{cases}$
  Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.

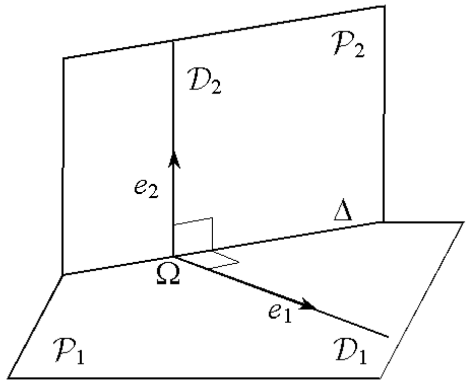
On a représenté ici deux plans affines $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Ces plans se coupent suivant une droite affine Δ.

Soit Ω un point de Δ.

Puisque la droite $\mathcal{D}_1$ passant par Ω et orthogonale à $\mathcal{P}_2$ est dans $\mathcal{P}_1$, Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

De même, la droite $\mathcal{D}_2$ passant par le point Ω et orthogonale au plan affine $\mathcal{P}_1$ est dans le plan affine $\mathcal{P}_2$.



19.5.3 Calcul de la distance à un hyperplan affine

Proposition 19.5.4 (distance d'un point à un hyperplan affine)
Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E.
Soit A un point de $\mathcal{H}$, et soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal unitaire à $\mathcal{H}$.
Pour tout point M de E, on a : $d(M,\mathcal{H}) = \left|\left(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n}\right)\right|$.

Si le vecteur $\overrightarrow{n}$ n'est pas unitaire, alors la distance de M à $\mathcal{H}$ s'écrit : $d(M,\mathcal{H}) = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{n}\|}\left|\left(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n}\right)\right|$

Cas particulier : distance à une droite affine dans $\mathbb{R}^2$

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, avec son produit scalaire canonique.
Soit $\mathcal{D}$ une droite affine d'équation $ax + by = h$. Soit $M(x_0, y_0)$ un point quelconque.

Alors la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par : $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 - h|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Cas particulier : distance à un plan affine dans $\mathbb{R}^3$

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, avec son produit scalaire canonique.

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine d'équation $ax + by + cz = h$. Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque.

Alors la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est donnée par : $d(M,\mathcal{P}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Distance à une droite affine dans $\mathbb{R}^3$

On se place dans $\mathbb{R}^3$, avec son produit scalaire et son orientation canoniques.

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine, passant par un point A et dirigée par un vecteur <u>unitaire</u> u.
Alors la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par : $d(M,\mathcal{D}) = \|\overrightarrow{AM} \wedge u\|$.

Si $\mathcal{D}$ est l'intersection de plans perpendiculaires $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, alors $d(M,\mathcal{D})^2 = d(M,\mathcal{P}_1)^2 + d(M,\mathcal{P}_2)^2$.

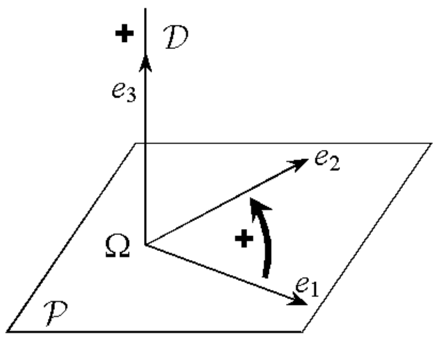
19.5.4 Orientation d'un hyperplan par un vecteur normal

Proposition 19.5.5 (orientation d'un hyperplan affine par un vecteur normal)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.
Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine, de direction H, et soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$.
On oriente la droite $D = H^\perp$ par la donnée du vecteur $\overrightarrow{n}$.
On en déduit une orientation de H (donc de $\mathcal{H}$) de la manière suivante : une base orthonormale $e = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H est dite directe si $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ est une base orthonormale directe de E.

Si on inverse l'orientation de D (en choisissant $-\overrightarrow{n}$ plutôt que $\overrightarrow{n}$), celle de $\mathcal{H}$ s'en trouve inversée.

Illustration en dimension 3

On suppose ici $\dim E = 3$.
La droite $\mathcal{D}$ est la normale en Ω au plan affine $\mathcal{P}$.
On oriente $\mathcal{D}$ par le choix du vecteur unitaire e_3.
Il en découle une orientation positive du plan $\mathcal{P}$.
Le repère orthonormal (Ω, e_1, e_2) de $\mathcal{P}$ est direct dans le plan $\mathcal{P}$ si et seulement si le repère orthonormal (Ω, e_1, e_2, e_3) est direct dans l'espace E.



19.6 Isométries vectorielles

19.6.1 Isométries vectorielles

Définition 19.6.1 (isométries vectorielles, automorphismes orthogonaux)
Soit E un espace euclidien. Soit f une application de E dans lui-même.
On dit que f est une isométrie vectorielle (ou encore : un automorphisme orthogonal) si f est linéaire et si elle « conserve la norme », c'est-à-dire si : $\forall u \in E,\ \|f(u)\| = \|u\|$.

Les expressions « automorphisme orthogonal » et « isométrie vectorielle » sont donc synonymes.
Toute isométrie vectorielle f de E est effectivement un automorphisme de E.
Soit f un automorphisme orthogonal et soit u un vecteur non nul de E : s'il existe un réel λ tel que $f(u) = \lambda u$, alors nécessairement λ est dans $\{-1, 1\}$.

Proposition 19.6.1 (caractérisation des isométries vectorielles)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
– *l'application f est une isométrie vectorielle (c'est-à-dire elle conserve la norme).*
– *l'application f* conserve le produit scalaire *: $\forall (x, y) \in E^2,\ (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.*
– *l'application f transforme* toute *base orthonormale de E en une base orthonormale de E.*
– *l'application f transforme* une *base orthonormale de E en une base orthonormale de E.*

Le groupe orthogonal

Les applications Id et $-\mathrm{Id}$ sont des automorphismes orthogonaux de E.
Le composé de deux automorphismes orthogonaux de E est un automorphisme orthogonal de E.
Enfin, si f est un automorphisme orthogonal alors f^{-1} est un automorphisme orthogonal.
On peut résumer ces propriétés de la façon suivante :

Proposition 19.6.2 (groupe orthogonal d'un espace euclidien)
Soit E un espace euclidien. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.
Alors $O(E)$ est un groupe pour la composition des applications, appelé groupe orthogonal *de E.*

19.6.2 Symétries vectorielles orthogonales

Définition 19.6.2 (symétries vectorielles orthogonales d'un espace euclidien)
Soit E un espace euclidien, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
La symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à F.
Si F est un hyperplan, on dit que f est la *réflexion* par rapport à F.
Si F est une droite, on dit que f est le *demi-tour* (ou *retournement*) d'axe F.

Si s est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à F, $-s$ est celle par rapport à $F^{\perp}$.

Subtilités de terminologie

Soit E un espace euclidien. Soit s une application linéaire involutive de E, c'est-à-dire telle que $s^2 = \mathrm{Id}$.

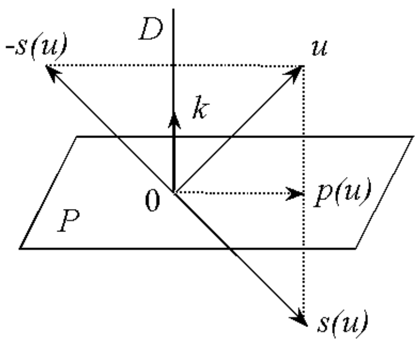
On sait que s est la symétrie vectorielle de E par rapport à $F = \mathrm{Inv}(f)$ parallèlement à $G = \mathrm{Opp}(f)$.

Alors s est une symétrie vectorielle *orthogonale* (c'est-à-dire $G = F^{\perp}$) si et seulement si s est un *automorphisme orthogonal* (c'est-à-dire conserve la norme).

En revanche, une projection orthogonale p n'est *pas* un automorphisme orthogonal, sauf si $p = \mathrm{Id}_E$.

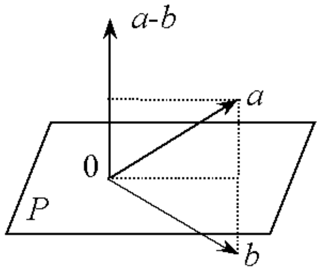
Illustration en dimension 3

On se place ici dans un espace euclidien de dimension 3.
La droite D et le plan P sont orthogonaux.
La droite D est dirigée par le vecteur unitaire k.
On a représenté la réflexion s par rapport au plan vectoriel P et la projection orthogonale p sur P.
On a $p(u) = u - (u \mid k)\, k$, et $s(u) = u - 2\,(u \mid k)\, k$.
L'application $-s$ est la symétrie orthogonale par rapport à D.



Proposition 19.6.3 (matrice d'une symétrie vectorielle ortogonale dans une base orthonormée)
Soit E un espace euclidien, et soit s une symétrie vectorielle orthogonale de E.
Alors on a l'égalité $(s(u) \mid v) = (u \mid s(v))$ pour tous vecteurs u et v.
Il en résulte que la matrice de s dans toute base orthonormale est symétrique.

Réflexion échangeant deux vecteurs de même norme



Soit E un espace vectoriel euclidien.

Soit a, b deux vecteurs distincts non nuls, tels que $\|a\| = \|b\|$.

Alors il existe une unique réflexion vectorielle qui échange a et b.

Cette application est la réflexion par rapport à l'hyperplan vectoriel P orthogonal au vecteur $a - b$.

19.7 Matrices orthogonales

19.7.1 Matrices orthogonales

Remarque préliminaire :

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de colonnes $C_1, \ldots, C_n$. Alors le terme général de $A = M^\top M$ est $a_{ij} = C_i^\top C_j$.

Définition 19.7.1 (matrices orthogonales)

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

– la matrice M vérifie $M^\top M = \mathrm{I}_n$.

– la matrice M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.

– les vecteurs-colonne de M forment une famille orthonormale.

Si ces conditions sont réalisées, on dit que M est une *matrice orthogonale*.

Remarques et exemples

Si M est une matrice orthogonale, il en est de même de $M^\top$ (car $M^\top = M^{-1}$).

Une matrice M est donc orthogonale si et seulement si ses lignes forment une famille orthonormale.

Les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

On verra plus loin que ce sont les seules les matrices orthogonales d'ordre 2.

Les matrices $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta & \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Proposition 19.7.1 (le groupe orthogonal $O(n)$)

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

C'est un groupe pour le produit des matrices (donc un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$).

On l'appelle le groupe orthogonal d'indice n.

Proposition 19.7.2 (lien entre base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale)

Soit M la matrice d'un endomorphisme f dans une base orthonormale de l'espace euclidien E.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

– l'application f est un automorphisme orthogonal de E (c'est-à-dire un élément du groupe $O(E)$).

– la matrice M est une matrice orthogonale (c'est-à-dire un élément du groupe $O(n)$).

On peut interpréter la proposition précédente en disant que les matrices orthogonales sont les matrices des automorphismes orthogonaux dans les bases orthonormales.

Si on se place dans $\mathbb{R}^n$ (avec son produit scalaire canonique), une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme f canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle.

Proposition 19.7.3 (matrices de passage entre bases orthonormales)
Soit E un espace euclidien, muni d'une base orthonormale $e = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Soit $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille de n vecteurs, et soit M la matrice de la famille ε dans la base e.
Alors la famille ε est une base orthonormale de E si et seulement si la matrice M est orthogonale.

On peut donc dire que les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre bases orthonormales.

19.7.2 Matrices orthogonales positives ou négatives

Proposition 19.7.4 (déterminant d'une matrice orthogonale)
Si M est une matrice orthogonale, alors $\det M$ est égal à 1 ou à -1.

Attention la **réciproque** est **fausse**!! Considérer par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 19.7.2 (matrices orthogonales positives ou négatives)
Soit M une matrice orthogonale d'ordre n.
Si $\det(M) = 1$, on dit que M est une matrice orthogonale *positive*.
Si $\det(M) = -1$, on dit que M est une matrice orthogonale *négative*.

Remarques

Si on échange deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice orthogonale positive, on obtient une matrice orthogonale négative (et réciproquement).

C'est la même chose si on remplace une colonne (ou une ligne) par son opposée.

Il existe des matrices orthogonales positives (considérer par exemple I_n).

Il existe des matrices orthogonales négatives (changer un coefficient diagonal de I_n en -1).

Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que $\det(-M) = (-1)^n \det(M)$: il en résulte que si M est orthogonale, les matrices M et $-M$ ont la même « orientation » si n est pair, et sont d'orientation contraire sinon.

Comatrice d'une matrice orthogonale

Si M appartient à $O(n)$ alors $\mathrm{Com}(M) = \varepsilon M$, avec $\varepsilon = \det(M) = \pm 1$.

En comparant un coefficient non nul de M avec son cofacteur, on peut donc déterminer ε.

Considérons par exemple la matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, qui est élément de $O(3)$.

Le coefficient $m_{11} = \dfrac{2}{3}$ et son cofacteur égaux. On est donc certain que $\det(M) = 1$.

Proposition 19.7.5 (le groupe spécial orthogonal $SO(n)$)
On note $SO(n)$, ou $SO_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales positives d'ordre n.
L'ensemble $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé groupe spécial orthogonal *d'indice n.*

L'ensemble des matrices orthogonales *négatives* (le complémentaire de $SO(n)$ dans $O(n)$) n'est pas un groupe : non seulement il ne contient pas le neutre I_n, mais il n'est pas stable : en effet si M et N sont orthogonales négatives, alors MN est orthogonale positive.

En revanche, l'inverse d'une matrice orthogonale négative est encore orthogonale négative.

La matrice I_n est orthogonale positive, alors que la matrice $-I_n$ n'est dans $SO(n)$ que si n est pair.

19.7.3 Isométries positives, négatives

Définition 19.7.3 (isométries positives ou négatives)
Si f est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E, alors $\det(f)$ est égal à 1 ou à -1.
Si $\det(f) = 1$, on dit que f est une isométrie *positive*.
Si $\det(f) = -1$, on dit que f est une isométrie *négative*.

Proposition 19.7.6 (le groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien)
Soit E un espace euclidien. On note $SO(E)$ l'ensemble des isométries positives de E.
L'ensemble $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$, appelé groupe spécial orthogonal *de E.*

Remarques

L'application Id est dans $SO(E)$. Mais $-\mathrm{Id}$ est dans $SO(E)$ si et seulement si $\dim(E)$ est paire.

La réflexion s par rapport à un hyperplan vectoriel est toujours un automorphisme orthogonal négatif.

Un demi-tour de E est une isométrie positive si $\dim(E)$ est impaire, et négative sinon.

Proposition 19.7.7 (isométries positives ou négatives dans un espace orienté)
Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien orienté E.
Soit e une base orthonormée de E. On sait que f transforme e en une base orthonormée ε.
Si f est une isométrie positive, alors les bases e et ε ont la même orientation.
Si f est une isométrie négative, alors les bases e et ε sont d'orientation contraire.

Ainsi les isométries positives *conservent l'orientation*, alors que les isométries négatives l'inversent.

Proposition 19.7.8 (conservation du produit mixte par une isométrie positive)
Soit f une isométrie vectorielle positive d'un espace euclidien orienté E.
Alors pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de E, on a : $[f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)] = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$.

On peut donc dire que les isométries vectorielles positives *conservent le produit mixte* (donc l'aire orientée en dimension 2, et le volume orienté en dimension 3).

19.8 Isométries en dimension 2

19.8.1 Matrices orthogonales de taille 2

Proposition 19.8.1 (matrices orthogonales d'ordre 2)
Les matrices orthogonales positives d'ordre 2 sont les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, *avec* $\theta \in \mathbb{R}$.
Les matrices orthogonales négatives d'ordre 2 sont les matrices $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, *avec* $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriétés des matrices orthogonales positives d'ordre 2

Pour tous réels θ et φ, on a : $R(\theta)R(\varphi) = R(\varphi)R(\theta) = R(\theta + \varphi)$.

Il en découle que le groupe $SO(2)$ est commutatif (c'est faux pour $SO(n)$ si $n \geqslant 3$).

On a $R(0) = I_2$ et, pour tout réel θ : $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

Pour tous réels θ et φ, on a : $R(\theta) = R(\varphi) \iff \theta \equiv \varphi\ [2\pi]$.

Propriétés des matrices orthogonales négatives d'ordre 2

Pour tous réels θ et φ, on a : $S(\theta)S(\varphi) = R(\theta - \varphi)$.

Pour tout réel θ, on a $S(\theta)^{-1} = S(\theta)^{\top} = S(\theta)$.

Toutes les matrices orthogonales négatives d'ordre 2 sont donc des matrices de symétrie.

Les automorphismes orthogonaux négatifs d'un plan sont des symétries orthogonales (à suivre...).

19.8.2 Angle de rotations et de vecteurs du plan

Proposition 19.8.2 (angle d'une rotation dans le plan euclidien orienté)
Soit E_2 un plan euclidien orienté, et soit r une isométrie vectorielle positive de E_2.
Il existe un réel θ (défini modulo 2π) vérifiant la propriété suivante :
La matrice de r dans toute *base orthonormale directe est égale à* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
On dit alors que r est la rotation d'angle θ, et on note $r = r(\theta)$.

On a en particulier $r(0) = \mathrm{Id}$ et $r(\pi) = -\mathrm{Id}$ (et ce sont les seules rotations involutives).
Dans E_2, les expressions « isométries vectorielles positives » et « rotations vectorielles » sont synonymes.

Remarques et propriétés

- La rotation inverse de $r(\theta)$ est $r(-\theta)$.
  Pour tous réels θ et φ, on a : $r(\theta)r(\varphi) = r(\varphi)r(\theta) = r(\theta+\varphi)$. Le groupe $SO(E_2)$ est donc commutatif.
- La matrice de la rotation $r(\theta)$ dans toute base orthonormale indirecte est $R(-\theta)$.
  Si on inverse l'orientation de E_2, la mesure d'une rotation est donc changée en son opposée.
- Si $r = r(\theta)$, avec $\theta \neq 0\ [2\pi]$, alors le seul vecteur invariant de r est $\overrightarrow{0}$.
- Si $r = r\left(\frac{\pi}{2}\right)$, et si e_1, e_2 forment une base orthonormale directe, alors $r(e_1) = e_2$ et $r(e_2) = -e_1$.

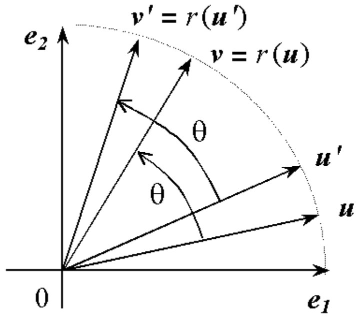
Proposition 19.8.3 (mesure de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires)
Soit E_2 un plan vectoriel euclidien orienté, et soit u, v deux vecteurs unitaires de E_2.
Il existe une et une seule rotation $r = r(\theta)$ telle que $r(u) = v$.
*On note $\widehat{(u, v)} = \theta\ [2\pi]$, et on dit que θ est une mesure (modulo 2π) de l'*angle orienté $\widehat{(u, v)}$.

La figure ci-dessous illustre cette propriété. La base e_1, e_2, orthonormale directe, n'est là que pour visualiser l'orientation positive choisie dans le plan. Tous les vecteurs considérés ici sont unitaires.

Il existe bien une *unique* rotation vectorielle $r = r(\theta)$ telle que $v = r(u)$. On commet souvent l'erreur de croire qu'il y a deux rotations transformant u en v (l'une « tournant » dans un sens, la deuxième tournant dans l'autre) ou même une infinité (selon le « nombre de tours effectués »).

La rotation r n'est qu'une application : seul compte où se trouve l'image v d'un vecteur u, et pas la manière dont on « passe » de u à v. L'erreur évoquée vient de la confusion entre la rotation r et les différentes mesures de son angle.

On se rend compte de l'unicité de la rotation r transformant u en v en se donnant un autre vecteur unitaire u'. La condition $v = r(u)$ détermine en effet le vecteur $v' = r(u')$ de manière unique.



Définition 19.8.1 (mesure de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls)
Dans un plan euclidien orienté E_2, soit u, v deux vecteurs non nuls.
On appelle mesure de l'*angle orienté* $\widehat{(u, v)}$ la mesure θ de l'angle orienté $\widehat{\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}\right)}$.
On note alors $\widehat{(u, v)} = \theta\ [2\pi]$.

Proposition 19.8.4 (calcul d'une mesure de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls)
Soit u, v deux vecteurs non nuls dans un plan euclidien orienté E_2.
Une mesure θ de l'angle $\widehat{(u, v)}$ est donnée par : $\cos\theta = \dfrac{(u \mid v)}{\|u\|\,\|v\|}$, *et* $\sin\theta = \dfrac{[u, v]}{\|u\|\,\|v\|}$.

Rappel : $[u, v]$ est le produit mixte de u et v (leur déterminant dans toute base orthonormale directe).

19.8.3 Classification des isométries d'un plan euclidien orienté

Proposition 19.8.5 (automorphismes orthogonaux négatifs de E_2)
On se place dans un plan euclidien orienté E_2, rapporté une base orthonormale directe $e = (e_1, e_2)$.
Soit s une isométrie négative de E_2. Soit $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice de s dans la base e.
Alors s est la réflexion par rapport à la droite dirigée par le vecteur $u = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e_2$.

Classification des isométries d'un plan euclidien orienté E_2

Les isométries positives de E_2 sont les rotations vectorielles.

Les isométries négatives de E_2 sont les réflexions par rapport à des droites vectorielles.

Le fait que E_2 soit orienté n'intervient pas dans cette classification, mais dans la possibilité de mesurer l'angle d'une rotation et l'angle polaire de l'axe d'une réflexion.