Chapitre 21

Séries numériques

Sommaire

21.1 Séries convergentes ou divergentes . . . 459
21.1.1 Définitions de base . . . 459
21.1.2 Premiers exemples . . . 460
21.1.3 Propriétés des séries convergentes . . . 460
21.2 Séries à termes positifs . . . 462
21.2.1 Convergence par utilisation de comparaisons . . . 462
21.2.2 Utilisation des séries de référence . . . 463
21.3 Convergence absolue . . . 463
21.4 Séries alternées . . . 464
21.5 Séries entières d'une variable réelle . . . 464
21.5.1 Rayon de convergence et somme d'une série entière . . . 464
21.5.2 Comparaisons ou calculs de rayons de convergence . . . 465
21.5.3 Opérations sur les séries entières . . . 466
21.5.4 Régularité de la somme d'une série entière . . . 467
21.5.5 Fonctions développables en série entière . . . 467
21.5.6 Développements usuels en série entière . . . 468
21.6 Représentation décimale des réels . . . 469

21.1 Séries convergentes ou divergentes

21.1.1 Définitions de base

Définition 21.1.1 (sommes partielles d'une série)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit N un entier naturel.
La quantité $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ est appelée *somme partielle d'indice N de la série* $\sum u_n$.

Avec les notations précédentes, on a $u_0 = S_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc à son tour déterminée par la donnée des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 0}$.

Définition 21.1.2 (convergence ou divergence d'une série)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{K}$.
On dit que la *série* $\sum u_n$ est *convergente* si la suite (S_N) de ses sommes partielles est convergente.
Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est *divergente*.

Définition 21.1.3 (somme d'une série convergente)
Soit $\sum u_n$ une série convergente.
La quantité $\lim_{N\to\infty} S_N$ est notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et est appelée *somme* de la série $\sum u_n$.

L'unicité de la limite implique l'unicité de la somme d'une série convergente.

Ne pas confondre « nature » et « somme » d'une série

Déterminer la *nature* d'une série, c'est dire si elle est convergente ou divergente. C'est ensuite un autre problème que de calculer la somme en cas de convergence.

Parfois les deux problèmes peuvent être traités simultanément, mais l'énoncé pourra demander de prouver d'abord la convergence, *puis* de calculer la somme.

Enfin il est fréquent qu'on puisse prouver la convergence d'une série sans pouvoir en calculer la somme.

Influence de la modification d'un nombre fini de termes

On ne modifie pas la *nature* de la série $\sum u_n$ en changeant la valeur d'un nombre fini des u_n.

En revanche, en cas convergence, on a toutes les chances de modifier la somme de la série.

Si la suite (u_n) n'est définie que pour $n \geqslant k$, on adapte facilement les définitions précédentes, et en cas de convergence, la somme de la série est notée $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$.

Définition 21.1.4 (reste d'ordre N d'une série convergente)
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série de $\mathbb{K}$, convergente, de somme S. Soit N un entier naturel.
On appelle *reste d'ordre N* de cette série, la quantité $R_N = S - S_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

Par définition de la convergence d'une série, on a $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$.

Mais attention : on ne doit pas dire qu'une série est convergente $\Leftrightarrow$ son reste d'indice N tend vers 0, car l'existence même de ce reste suppose *déjà* que la série converge.

21.1.2 Premiers exemples

▷ **La série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$**

Pour tout $n \geqslant 1$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$. On a $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ donc $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = 1 - \frac{1}{N+1}$.

Il en résulte que $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

▷ **La série exponentielle**

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$ (utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral).

La série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ (dite *série exponentielle*) est donc convergente et sa somme est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

▷ **La série harmonique**

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n} \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1) - \ln(n)$. Ainsi $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \ln(N+1)$.

Il en résulte $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ (dite *série harmonique*) est donc divergente.

▷ **La série harmonique alternée**

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1} \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

Il en résulte $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} (-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Mais $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^N\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+1}$. Il en résulte $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = \ln(2)$.

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (dite *série harmonique alternée*) est convergente et sa somme est $\ln(2)$.

21.1.3 Propriétés des séries convergentes

Proposition 21.1.1 (linéarité de la somme)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de $\mathbb{K}$. Soit λ et μ dans $\mathbb{K}$.
Si les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont convergentes, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente.
Dans ce cas, on a l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Si $\lambda \neq 0$, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (\lambda u_n)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sont de même nature.

Remarque importante sur les sommes de deux séries

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de natures différentes, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Il est possible que $\sum(u_n + v_n)$ soit convergente alors que ni $\sum u_n$ ni $\sum v_n$ ne le sont.

On ne développera donc pas $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n)$ sans vérifier préalablement l'existence de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Proposition 21.1.2 (une condition nécessaire, mais non suffisante, de convergence)
Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente, alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$*. Attention la réciproque est fausse !*
Si $\lim_{n\to\infty} u_n$ *n'existe pas ou est non nulle, la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est dite* grossièrement divergente.

Définition 21.1.5 (séries géométriques)
Soit a un élément de $\mathbb{K}$. La série $\sum a^n$ est appelée série géométrique de raison a.

Si $a \neq 1$, on sait que, pour tout N de $\mathbb{N}$: $S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n = \dfrac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$

Proposition 21.1.3 (condition nécessaire et suffisante de convergence de la série géométrique)
La série géométrique $\sum a^n$ *est convergente si et seulement si* $|a| < 1$.
Dans ce cas, la somme est $S = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$*, et plus généralement :* $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a^n = \dfrac{a^{N+1}}{1-a}$.

Proposition 21.1.4 (lien suite-série)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de* $\mathbb{K}$.
La suite (u_n) *et la série* $\sum(u_{n+1} - u_n)$ *sont de même nature.*
En cas de convergence, on $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = (\lim_{n\to+\infty} u_n) - u_0$.

Cette propriété ramène l'étude de la nature d'une suite (u_n) à celle de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$.

Elle permet aussi d'étudier $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ si on sait écrire v_n sous la forme $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Proposition 21.1.5 (convergence des séries à termes complexes)
Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de nombres complexes.*
La série $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ *est convergente si et seulement si les séries réelles* $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(z_n)$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}\ (z_n)$ *le sont.*
En cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\ (z_n)$.

21.2 Séries à termes positifs

21.2.1 Convergence par utilisation de comparaisons

Proposition 21.2.1 (convergence par majoration des sommes partielles)
Soit $\sum u_n$ *une série à termes réels positifs ou nuls.*
Il est clair que la suite (S_N) *des sommes partielles de la série* $\sum u_n$ *est croissante.*
Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ *converge si et seulement si la suite* (S_N) *est majorée.*

Si l'hypothèse $u_n \geqslant 0$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0, le résultat reste valable.

Sachant que $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature, l'énoncé se généralise (avec des modifications évidentes) aux séries réelles dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.

Proposition 21.2.2 (convergence par domination)
Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries, telles que* $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n \geqslant n_0$.
— *si on sait que la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*
— *si la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *converge, la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, et pour tout* $N \geqslant n_0$, *on a :* $\sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=N}^{\infty} v_n$.

Proposition 21.2.3 (convergence par équivalence)
Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs (au moins à partir d'un certain rang).*
Si $u_n \sim v_n$, *alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

La proposition précédente vaut aussi pour des séries à termes négatifs à partir d'un certain rang.
L'hypothèse selon laquelle les u_n et v_n gardent un signe constant est essentielle.
En effet, si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1+u_n)$, on a $u_n \sim v_n$ mais $\sum u_n$ converge alors que $\sum v_n$ diverge.

Proposition 21.2.4 (comparaison série-intégrale dans le cas monotone)
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction, continue par morceaux, décroissante et à valeurs positives.*
Pour tout entier $n > n_0$, *on a l'encadrement :* $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour tout $N > n_0$, *on en déduit :* $\displaystyle\int_{n_0+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$
Il en résulte que la série $\sum f(n)$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est un nombre réel.*

Proposition 21.2.5 (séries de référence)
Séries de Riemann *: la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.
Séries de Bertrand *: la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$

Par exemple, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, et on montre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

21.2.2 Utilisation des séries de référence

Proposition 21.2.6 (utilisation des séries de référence de Riemann)
S'il existe $\alpha > 1$ *et* $M \geqslant 0$ *tels que* $0 \leqslant n^\alpha u_n \leqslant M$ *pour* $n \geqslant n_0$*, alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

C'est notamment le cas si $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$*, c'est-à-dire si* $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

S'il existe $M > 0$ *tel que* $u_n \geqslant \dfrac{M}{n}$ *pour* $n \geqslant n_0$*, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge. C'est le cas si* $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$*, où* $\lambda > 0$.

Proposition 21.2.7 (règles de d'Alembert)
Soit (u_n) *une suite de* $\mathbb{R}^{+*}$*. On suppose que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$.

Si $0 \leqslant \alpha < 1$*, la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente. Si* $\alpha > 1$*, la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est divergente.*

Si $\alpha = 1$ *on ne peut rien dire : c'est le cas* douteux *de la règle de d'Alembert.*

Toutefois, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$*, alors la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est divergente.*

21.3 Convergence absolue

Définition 21.3.1 (convergence absolue d'une série numérique)
On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 21.3.1 (la convergence absolue implique la convergence)
Si la série $\sum u_n$ *est absolument convergente, alors elle est convergente et* $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Définition 21.3.2 (complément : série semi-convergente)
Si la série $\sum u_n$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente, elle est dite *semi-convergente*.

La série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est sans doute l'exemple type de série semi-convergente.

Proposition 21.3.2 (critère suffisant de convergence absolue par domination)
Soit (z_n) *une suite complexe, et soit* (v_n) *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^+$.
Si $z_n = \mathrm{O}(v_n)$*, et si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum z_n$ *est absolument convergente, donc convergente.*

Définition 21.3.3 (produit de Cauchy de deux séries numériques)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels ou complexes.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$, ou encore $w_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p\, v_{n-p}$, ou encore $w_n = \sum\limits_{q=0}^{n} u_{n-q}\, v_q$.

On dit que la série $\sum w_n$ est le *produit de Cauchy* des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Proposition 21.3.3 (convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries ACV)
Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques absolument convergentes.*
Alors leur série produit de Cauchy $\sum w_n$ *est absolument convergente et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \Bigl(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_p\Bigr)\Bigl(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} v_q\Bigr)$

21.4 Séries alternées

Définition 21.4.1 (série alternée)
Soit (u_n) une suite de nombres réels.
On dit que la série $\sum u_n$ est *alternée* si le signe de $(-1)^n u_n$ est constant.

Cela signifie qu'il existe des $a_n \geqslant 0$ tels que : $\bigl(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n a_n\bigr)$ ou $\bigl(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} a_n\bigr)$.

Proposition 21.4.1 (théorème spécial des séries alternées)
Soit $\sum u_n$ *une série alternée. Si* $n \mapsto |u_n|$ *tend vers* 0 *en décroissant, alors* $\sum u_n$ *converge.*
De plus, en notant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *et* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *la somme partielle et le reste d'indice* n *:*

a) *Les suites* $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ *sont adjacentes.*
b) *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*, on a* $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$ *et* R_n *a le même signe que* u_{n+1}*.*
c) *La somme* S *de la série vérifie* $|S| \leqslant |u_0|$*, et* S *a le même signe que* u_0*.*

21.5 Séries entières d'une variable réelle

21.5.1 Rayon de convergence et somme d'une série entière

Définition 21.5.1 (série entière d'une variable réelle)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Soit x une variable réelle.
On dit que la série numérique $\sum a_n x^n$ est une *série entière* de coefficients a_n.
La fonction $x \mapsto S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est appelée *somme de la série entière.*

Remarque : la fonction S est toujours définie au moins en 0, et on a $S(0) = a_0$.

Exemples

– La série entière $\sum x^n$ est définie sur $]-1, 1[$ et sa somme est $\dfrac{1}{1-x}$.
– La série entière $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et sa somme est e^x.
– La série entière $\sum n!\, x^n$ n'est définie qu'en $x = 0$.

Définition 21.5.2 (rayon de convergence d'une série entière)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

L'ensemble $\{\rho \in \mathbb{R}^+,\ (|a_n|\,\rho^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\}$ est non vide (il contient 0).

Sa borne supérieure R dans $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n\,x^n$.

L'appellation *rayon de convergence* est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 21.5.1 (intervalle ouvert de convergence d'une série entière)
Soit $\sum a_n\,x^n$ une série entière de rayon de convergence R (où R est dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$).

- *la série $\sum a_n\,x^n$ est absolument convergente pour $|x| < R$.*
- *la série $\sum a_n\,x^n$ est grossièrement divergente pour $|x| > R$.*

*On dit que $]-R, R[$ est l'*intervalle ouvert de convergence *de la série entière $\sum a_n\,x^n$.*

Remarques

- Si $R = 0$, l'intervalle ouvert de convergence est vide (ça ne présente que peu d'intérêt).
- Si $R > 0$, la somme $S(x) = \sum a_n\,x^n$ est donc définie sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$. Il est possible que la série diverge ou converge en $x = -R$ ou/et en $x = R$ (c'est-à-dire sur le bord de l'intervalle ouvert), mais on ne peut rien dire de général (et ça n'est pas important).
- On ne change pas le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ en modifiant un nombre fini de coefficients a_n (en revanche, on modifie très certainement la somme de cette série entière).

  On considère parfois (souvent) des séries entières $\sum a_n x^n$ dont le terme général n'est défini qu'à partir d'un certain rang n_0. On notera alors $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n x^n$.
- Les séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum (-1)^n a_n x^n$ ou $\sum |a_n|\,x^n$ ont le même rayon de convergence (ça vient de la définition 21.5.2 où n'intervient en fait que le module des a_n).

21.5.2 Comparaisons ou calculs de rayons de convergence

Proposition 21.5.2 (comparaisons ou calculs de rayons de convergence)
Soit R_a le rayon de convergence de $\sum a_n\,x^n$, et soit R_b celui de $\sum b_n\,x^n$.

Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ (c'est-à-dire : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \exists\,\lambda > 0, \forall\, n \geqslant n_0,\ |a_n| \leqslant \lambda\,|b_n|$), alors $R_a \geqslant R_b$.

Si $a_n \sim b_n$ (c'est-à-dire : $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\,|b_n|$), alors $R_a = R_b$.

Proposition 21.5.3 (si f est une fraction rationnelle non nulle, $\sum a_n x^n$ et $\sum f(n) a_n x^n$ ont même rayon)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{K}$, et soit $n \mapsto f(n)$ une fonction rationnelle non nulle.

Alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum f(n) a_n x^n$ ont le même rayon de convergence.

Deux cas particuliers importants

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière, de rayon de convergence R.

- Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ (obtenue par dérivation terme à terme) est R.
- Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ (obtenue par intégration terme à terme) est R.
- Plus généralement, les séries entières obtenues à partir de $\sum a_n x^n$ par dérivations ou par primitivations successives ont le même rayon de convergence (à suivre).

Proposition 21.5.4 (utilisation de la règle de d'Alembert)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence.

On suppose $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0. On note $u_n = a_n x^n$, avec x fixé non nul.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|$.

En utilisant la règle de D'Alembert, on en déduit le résultat suivant :

Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$, *alors* $R = \frac{1}{\ell}$ *(en notant $R = +\infty$ si $\ell = 0$, et $R = 0$ si $\ell = +\infty$).*

Proposition 21.5.5 (une situation fréquente)
Soit f une fonction rationnelle. Alors le rayon de convergence de $\sum f(n) x^n$ est égal à 1.

21.5.3 Opérations sur les séries entières

Proposition 21.5.6 (somme de deux séries entières)
Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.

Soit ρ le rayon de convergence de la « série entière somme » $\sum (a_n + b_n) x^n$.

Si $R_a \neq R_b$, on a l'égalité $\rho = \min(R_a, R_b)$. Si $R_a = R_b \ (= R)$, on a l'inégalité $\rho \geqslant R$.

Dans tous les cas, et si $|x| < \min(R_a, R_b)$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Proposition 21.5.7 (produit de Cauchy de deux séries entières)
Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.

Leur produit de Cauchy *est, par définition, la série entière $\sum c_n x^n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.*

Soit r le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^n$.

Alors $r \geqslant \min(R_a, R_b)$. Pour $|x| < \min(R_a, R_b)$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$

21.5.4 Régularité de la somme d'une série entière

Proposition 21.5.8 (continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la somme $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$.
Ses primitives sur $]-R, R[$ s'obtiennent par intégration terme à terme de la série entière $\sum a_n x^n$.

Proposition 21.5.9 (dérivations successives terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la somme $x \mapsto S(x)$ de cette série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.
Plus précisément, pour tout p de $\mathbb{N}$, la fonction $S^{(p)}$ s'obtient par p dérivations terme à terme.
Autrement dit : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R, R[,\ S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}\, x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-p)!} a_n\, x^{n-p}$.

La proposition a deux conséquences intéressantes : la première est que les coefficients d'une série entière sont déterminés par les dérivées successives de la somme de cette série à l'origine :

Proposition 21.5.10 (coefficients d'une série entière et dérivées successives en 0)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon $R > 0$, de somme $x \mapsto S(x)$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a l'égalité : $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

La deuxième conséquence est la possibilité d'identifier terme à terme les coefficieents de deux séries entières dont les sommes sont égales aux voisinage de l'origine.

Proposition 21.5.11 (identification terme à terme de deux séries entières)
Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R_a > 0$ et $R_b > 0$.
Soit r un réel strictement positif, inférieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.
On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ pour tout x de $]-r, r[$. Alors $a_n = b_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Parité ou imparité de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon $R > 0$, de somme $x \mapsto S(x)$.
La fonction $x \mapsto S(x)$ est paire (resp. impaire) si et seulement si les a_{2n+1} (resp. les a_{2n}) sont nuls.

21.5.5 Fonctions développables en série entière

Définition 21.5.3 (fonction développable en série entière sur $]-r, r[$)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.
Soit r un réel strictement positif, tel que $]-r, r[$ soit inclus dans I.

On dit que f est *développable en série entière* sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ (de rayon de convergence au moins égal à r) telle que : $\forall\, x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Pour tout x de $]-1,1[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$, donc f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

Bien sûr $f(x)$ existe encore en dehors de $]-1,1[$, mais ne peut plus être représenté par cette série entière.

Définition 21.5.4 (série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I contenant 0.

On appelle *série de Taylor* de f la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 21.5.12 (caractère nécessaire de la série de Taylor)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-r,r[$.

La série entière égale à f sur $]-r,r[$ est alors nécessairement la série de Taylor de f.

Autrement dit, on a nécessairement : $\forall\, x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$.

On peut trouver des exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$, mais qui ne sont pas développable en série entière.

Opérations sur les fonctions développables en série entière

Soit f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$.

- pour tous scalaires α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est développable en série entière sur $]-r,r[$.
  la fonction fg est développable en série entière sur $]-r,r[$.
- les dérivées successives de f sont développables en série entière sur $]-r,r[$, et leur développement s'obtient par dérivations successives, terme à terme, de celui de f.
- les primitives de f sont développables en série entière sur $]-r,r[$, et leur développement s'obtient par intégration terme à terme de celui de f (attention tout de même à la constante d'intégration).

21.5.6 Développements usuels en série entière

On donne ici les développements en série entière usuels (ceux qui sont au programme et ceux qui s'en déduisent facilement), en précisant l'intervalle $]-r,r[$ sur lequel ces développements sont valables.

Rappelons qu'on ne considère ici que des développements en série entière de la variable réelle x.

Fonction exponentielle

Les trois développements suivants sont valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}} \qquad \boxed{\forall\, a > 0, \quad a^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!}\, x^n} \qquad \boxed{\forall\, \omega \in \mathbb{C}, \quad e^{\omega x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{n!}\, x^n}$$

Fonctions trigonométriques directes

Les quatre développements suivants sont valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.

– avec les parties réelle et imaginaire de e^{ix} : $\boxed{\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$ $\boxed{\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$

– avec les parties paires et impaires de e^x : $\boxed{\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$ $\boxed{\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$

Fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ **et** $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

Ces deux développements sont valables sur $]-1,1[$: $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$ $\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n}$

Fonctions $x \mapsto \ln(1-x)$ **et** $x \mapsto \ln(1+x)$

Par primitivation terme à terme, sur $]-1,1[$: $\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$ $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}$

Le développement de $x \mapsto \ln(1+x)$ est encore valable en $x = 1$. Ainsi : $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Développement de $(1+x)^\alpha$

Ce développement est valable sur $]-1,1[$: $\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n}$

Deux remarques :
– Si α est dans $\mathbb{N}$, le développement précédent est fini (il se réduit au développement de $(1+x)^\alpha$ par la formule du binôme), et $R = +\infty$ (invoquer les séries entières semble ici un peu exagéré).
– Si α n'est pas un entier, on se gardera bien d'exprimer $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ avec des factorielles.

21.6 Représentation décimale des réels

Proposition 21.6.1 (développement décimal propre d'un réel de l'intervalle $[0,1[$)
Pour tout réel x de $[0,1[$, il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, vérifiant les propriétés suivantes :
– pour tout $n \geqslant 1$, a_n est un entier de $\{0,1,\ldots,9\}$, et : $\forall\, n_0 \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant n_0,\ a_n \neq 9$.
– on a l'égalité $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$, appelée développement décimal propre du réel x.

Ce résultat s'étend aux réels positifs en écrivant : $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n 10^{-n}$.

Ici $\sum_{n=-\infty}^{0} a_n 10^{-n} = a_{-m}10^m + \cdots + a_{-2}10^2 + a_{-1}10 + a_0$ est l'écriture décimale finie de l'entier $\lfloor x \rfloor$.